Chapitre 0 : Résolution d'équations

Table des matières

I Quantificateurs

Définition 1. Une propriété est un énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguité s'il est vrai ou faux.

Certaines propriétés ne dépendent pas de variables :

— P_1 : "$3 > \pi$", P_1 est fausse.

— P_2 : "La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. P_2 est vraie.

Mais il est courant qu'elles en dépendent :

— $P_1(x)$: "$3 > x$". Ici, $P_1(2)$ est vraie et $P_1(\pi)$ est fausse.

— $P_2(f)$: "La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$". Ici, $P_2(\exp)$ est vraie, $P_2(x \mapsto x^2)$ est fausse.

Les (in)-équations sont des propriétés mathématiques contenant une (in)-égalité entre deux expressions mathématiques. Résoudre une (in)-équation c'est donné sous la forme la plus simple possible toutes les valeurs pour lesquelles cette propriété est vérifiée. Dans ce chapitre, on se restreindra au cas où les équations contiennent une seule inconnue réelle. On considérera dans d'autres chapitres le cas où les variables sont plusieurs réelles (systèmes linéaires) ou mêmes des fonctions (équations différentielles).

On utilisera dans la suite du cours les quantificateurs suivants :

Définition 2. Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'une variable $x \in E$.

- $\forall$ se lit 'quelque soit' ou 'pour tout'. Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists$ se lit 'il existe'. Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$

Depuis le début du siècle, tous les objets mathématiques sont décrits en utilisant le langage des ensembles. Ensembles de nombres, ensembles de points, ensembles de fonctions, etc...

On ne définit pas la notion d'ensemble. Nous allons simplement préciser les notations et les règles pour utiliser ce langage de façon sûre.

Quand on a des ensembles avec un nombre fini d'élément on peut les écrire à la main, par exemple $E = \{1, 4, 28\}$ est un ensemble à trois éléments contenant, 1, 4 et 28.

Pour les ensembles avec une infinité d'éléments c'est plus difficile pour les décrire. Certains ont déjà des notations communément acceptées :

— $\mathbb{N}$ les entiers naturels

— $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs

— $\mathbb{Q}$ les rationnels

— $\mathbb{R}$ les réels

On en verra d'autres au cours de l'année.

Si on se donne un ensemble E et une propriété P, on peut former un nouvel ensemble F constitué des éléments de E qui vérifient la propriété P. Cela s'écrit :

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}$$

Les intervalles sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$, de la forme

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

(ou $x \leq a$, ou $x > a$, ou $a < x \leq b$...) Ils ont une notation spéciale :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$$

Les autres intervalles ont une notation similaire (eg. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$...), on les verra durant les exercices.

Pour finir, un petit dernier ensemble un peu particulier, l'ensemble avec 0 élément, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$.

II Equations polynomiales

C'est quoi résoudre une équation ?

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, consiste à caractériser sous forme d'ensemble le plus simple possible (des intervalles par exemples) les valeurs pour lesquelles la propriété définie par l'équation est vraie.

Résoudre $x + 1 > 2x - 1$, c'est donc décrire l'ensemble $S = \{x \mid x + 1 > 2x - 1\}$ le plus simplement possible. On obtient $S = \{x \mid 2 > x\}$ soit

$$S =]-\infty, 2[$$

Si on appelle $E(x)$ la proposition : "$E(x) : x + 1 > 2x - 1$" on peut donc dire

$$\forall x \in S, E(x) \text{ est vraie}$$

$$\forall x \notin S, E(x) \text{ est fausse}$$

De façon "concrète" on omet généralement la dépendance en la variable de l'équation, on note par exemple $E : x + 1 > 2x - 1$ l'équation et on donne l'ensemble des solutions

$$S_E =]-\infty, 2[$$

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(E_1)\quad x^2+3x+2=0 \qquad (E_3)\quad x^2+3x+2\geq 0 \qquad (E_5)\quad x^2+2x+1\leq 0$$

$$(E_2)\quad x^2+2x+1=0 \qquad (E_4)\quad x^2+2x+1\geq 0 \qquad (E_6)\quad x^2+2x+2<0$$

Correction 1. Pour chaque équation on chercher les racines à l'aide (ou non) de la formule du discriminant on obtient

$$\begin{aligned} S_{E_1} &= \{-2,-1\} \\ S_{E_2} &= \{-1\} \\ S_{E_3} &=]-\infty,-2]\cup[-1,+\infty[\\ S_{E_4} &= \mathbb{R} \\ S_{E_5} &= -1 \\ S_{E_6} &= \emptyset \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(P_1):\quad x^3+3x^2+2x=0,\quad (P_2)\quad x^3-3x+2=0,\quad (P_3)\quad x^4+2x^2+1\geq 0$$

Correction 2. P_1 admet 0 comme solution évidente, on peut donc factoriser par x. On obtient $P_1 \iff x(x^2+3x+2)=0$ et on trouve les racines de x^2+3x+2 à l'aide du discriminant (ou non), on obtient

$$S_{P_1}=\{0,-1,-2\}$$

P_2 admet 1 comme solution évidente, on peut donc factoriser par $x-1$. On obtient $P_2 \iff (x-1)(x^2+x-2)=0$ et on trouve les racines de x^2+x-2 à l'aide du discriminant (ou non), on obtient

$$S_{P_1}=\{1,-2\}$$

P_3 est un peu différent, on reconnait ici une identité remarquable :

$$P_3 \iff (x^2+1)^2\geq 0$$

Ainsi

$$S_{P_3}=\mathbb{R}$$

Points à retenir

— La formule du discriminant et des racines.

— La factorisation quand on obtient une racine.

— L'écriture des solutions sous forme d'intervalles ou d'ensembles.

— Les identités remarquables.

III Equations rationnelles

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(Q_1):\quad \frac{-2}{x+3}=x,\quad (Q_2):\quad \frac{-2}{x+3}\leq x,\quad (Q_3):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{x+2}$$

$$(Q_4):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{x-1},\quad (Q_5):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

Correction 3. On met au même dénominateur.

$$\begin{aligned}
Q_1 &\iff \frac{-2}{x+3} - x = 0 \\
&\iff \frac{-2-x^2-3x}{x+3} = 0 \\
&\iff \frac{x^2+3x+2}{x+3} = 0
\end{aligned}$$

et on trouve les racines de x^2+3x+2 à l'aide du discriminant (ou non), on obtient

$$S_{Q_1} = \{-2, -1\}$$

De même pour l'inéquation :

$$\begin{aligned}
Q_2 &\iff \frac{-2}{x+3} - x \leq 0 \\
&\iff \frac{-2-x^2-3x}{x+3} \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2+3x+2}{x+3} \geq 0
\end{aligned}$$

et on trouve les racines de x^2+3x+2 à l'aide du discriminant (ou non). $\boxed{\text{On fait un tableau de signes !}}$ et on obtient

$$S_{Q_2} =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$$

Idem pour Q_3

$$\begin{aligned}
Q_3 &\iff \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x+2} < 0 \\
&\iff \frac{(x+1)(x+2)-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)} < 0 \\
&\iff \frac{x^2+2x+2-(x^2-4x+3)}{(x-1)(x+2)} < 0 \\
&\iff \frac{6x-1}{(x-1)(x+2)} < 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On fait un tableau de signes !}}$ et on obtient

$$S_{Q_3} =]-\infty, \frac{1}{6}[\cup]1, +\infty$$

Pour Q_4 les fractions sont déjà au même dénominateur.
$\boxed{\text{On ne multiplie pas pour autant par } x-1 \text{ dont on ne connaît pas le signe !!!}}$
On obtient :

$$\begin{aligned}
Q_4 &\iff \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x-1} < 0 \\
&\iff \frac{(x+1)-(x-3)}{x-1} < 0 \\
&\iff \frac{4}{x-1} < 0
\end{aligned}$$

On obtient

$$S_{Q_4} =]-\infty, 1[$$

Pour mettre au même dénominateur les expressions sur Q_5, il suffit juste de changer le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
Q_5 &\iff \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{x-3}{(x-1)^2} < 0 \\
&\iff \frac{x^2-1-x+3}{x-1} < 0 \\
&\iff \frac{x^2-x+2}{x-1} < 0
\end{aligned}$$

Comme $x^2 - x + 2$ n'admet pas de racine réelle, l'expression est toujours positive. Donc les solutions sont

$$S_{Q_5} =]-\infty, 1[$$

Points à retenir

— La mise au même dénominateur.

— La condition pour multiplier une inéquation. (signe)

— Les règles de calculs sur les fractions.

— L'utilisation d'un tableau de signes

IV Equations avec des radicaux

Mettre au carré une équation n'est pas une opération simple ! En effet, voici le problème qui se pose, pour quelles valeurs de (a, b) a-t-on

$$a = b \iff a^2 = b^2 \ ?$$

La propriété précédente N'EST PAS VRAIE pour tout a, b dans $\mathbb{R}$! !

On a seulement

$$\forall\, a \geq 0, \forall\, b \geq 0, \quad a = b \iff a^2 = b^2$$

Il faut donc connaître les signes des expressions que l'on met au carré.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

(R_1) : $\sqrt{x} = x$

(R_2) : $\sqrt{x+2} = x$

(R_3) : $\sqrt{x+1} = -x+1$

(R_4) : $\sqrt{x} < 2x+1$

(R_5) : $\sqrt{x+2} \geq x$

(R_6) : $\sqrt{x-2} \geq x$

(R_7) : $\sqrt{x^2+x} \leq \sqrt{x+1}$

(R_8) : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} > x$

Correction 4. $\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_1) : \sqrt{x} = x$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x}$ soit bien défini, il est nécessaire que x soit positif aussi. Ainsi, (R_1) est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Donc le membre de droite, x, qui *a priori* peut prendre des valeurs quelconque dans $\mathbb{R}$, doit ici être positif. Les deux membres sont donc positifs et on a donc

$$(R_1) \iff x = x^2$$

On factorise :

$$(R_1) \iff x - x^2 = 0 \iff x(1-x) = 0$$

Ainsi, les solutions de R_1 sont

$$\boxed{S_{R_1} = \{0, 1\}}$$

$\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_2) : \sqrt{x+2} = x$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x+2}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x+2}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x+2$ soit positif aussi. Ainsi, (R_2) est bien définie sur $[-2, +\infty[$. Donc le membre de droite, x n'est pas nécessairement positif ! Il faut faire une disjonction de cas ! Pour autant, il est évident que si x est négatif, x ne sera pas solution, car un nombre négatif ne peut être égal à un nombre positif.

Voici comment on procède : <u>CAS 1 : Si $x < 0$</u> Alors x n'est pas solution, car $\sqrt{x+2} \geq 0$.

<u>CAS 2 : Si $x \geq 0$</u> Les deux membres sont donc positifs et on a donc $\forall x \geq 0$

$$(R_2) \iff x + 2 = x^2$$

On factorise :

$$(R_2) \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0$$

dont les solutions sont $\{-1, 2\}$. Mais comme $x \geq 0$, seul $x = 2$ est solution.

Ainsi, l'ensemble des solutions de R_2 est

$$\boxed{S_{R_2} = \{2\}}$$

$\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_3) : \sqrt{x+1} = -x + 1$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x+1}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x+1}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x+1$ soit positif aussi. Ainsi, (R_3) est bien définie sur $[-1, +\infty[$. Donc le membre de droite, $-x+1$ n'est pas nécessairement positif ! Il faut faire une disjonction de cas ! Ici, le cas simple sera quand $-x+1$ est négatif.

Voici comment on procède : <u>CAS 1 : Si $-x+1 < 0$, ie. $x > 1$</u> Alors x n'est pas solution, car $\sqrt{x+1} \geq 0$.

<u>CAS 2 : Si $-x+1 \geq 0$, ie. $x \leq 1$</u> Les deux membres sont donc positifs et on a donc $\forall x \leq 1$

$$(R_3) \iff x + 1 = (-x+1)^2$$

On développe et on factorise :

$$(R_2) \iff x + 1 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

dont les solutions sont $\{0, 3\}$. Mais comme $x \leq 1$, seul $x = 0$ est solution.

Ainsi, l'ensemble des solutions de R_3 est

$$\boxed{S_{R_3} = \{0\}}$$

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_4) : \sqrt{x} < 2x+1$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x}$ soit bien défini, il est nécessaire que x soit positif aussi. Ainsi, (R_4) est bien définie sur $[0,+\infty[$. Donc le membre de droite, $2x+1$ est positif, on peut donc mettre au carré : $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned}(R_4) &\iff x < (2x+1)^2 \\ &\iff x < 4x^2+4x+1 \\ &\iff 4x^2+3x+1 > 0\end{aligned}$$

Le discriminant de $4x^2+3x+1$ est négatif, donc $4x^2+3x+1$ n'admet pas de racine réelle, donc $4x^2+3x+1 > 0$ est toujours vérifié. Ainsi, l'ensemble des solutions de R_4 est

$$\boxed{S_{R_4} = [0,+\infty[}$$

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_5) : \sqrt{x+2} \geq x$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x+2}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x+2}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x+2$ soit positif aussi. Ainsi, (R_5) est bien définie sur $[-2,+\infty[$. Donc le membre de droite, x n'est pas nécessairement positif, il faut faire une disjonction de cas :

<u>Cas 1 : $x<0$</u>, Dans ce cas, x est solution de R_5, car $\sqrt{x+2} \geq 0 > x$. On obtient l'ensemble des solutions sur $[-2,0[$,

$$S_{R_5,1} = [-2,0[$$

<u>Cas 2 : $x \geq 0$</u>, Dans ce cas, les deux membres sont positifs, on peut donc mettre au carré : $\forall x \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}(R_5) &\iff x+2 \geq x^2 \\ &\iff x^2-x-2 \leq 0 \\ &\iff (x-2)(x+1) \leq 0\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour $x \in [-1,2]$, donc sur l'intervalle, $[0,+\infty[$ l'ensemble des solutions est

$$S_{R_5,2} = [0,2]$$

On conclut en faisant l'union des deux cas, l'ensemble des solutions de R_5 sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{S_{R_5} = [-2,0[\cup[0,2] = [-2,2]}$$

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_6) : \sqrt{x-2} \geq x$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x-2}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x-2}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x-2$ soit positif aussi. Ainsi, (R_6) est bien définie sur $[2,+\infty[$. Donc le membre de droite, x est positif, on peut donc mettre au carré : $\forall x \in [2,+\infty[$,

$$\begin{aligned}(R_6) &\iff x-2 \geq x^2 \\ &\iff x^2-x+2 \leq 0\end{aligned}$$

Le discriminant de x^2-x+2 est négatif, donc x^2-x+2 n'admet pas de racine réelle, donc $x^2-x+2 \leq 0$ n'est jamais vérifié. Ainsi, l'ensemble des solutions de R_6 est

$$\boxed{S_{R_6} = \emptyset}$$

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_7) : \sqrt{x^2+x} \leq \sqrt{x+1}$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x^2+x}$ et $\sqrt{x+1}$ sont des racines, ce sont donc des réels positifs. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x^2+x}$ soit bien défini, il est nécessaire que x^2+x soit positif aussi, donc $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$. pour que $\sqrt{x+1}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x+1$ soit positif aussi, donc $x \in [-1, +\infty[$ Ainsi, (R_7) est bien définie sur $\{-1\} \cup [0, +\infty[$.

Les deux membres sont positifs, on peut mettre au carré : $\forall x \in \{-1\} \cup [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}(R_7) &\iff x^2+x \leq x+1\\ &\iff x^2-1 \leq 0\\ &\iff (x-1)(x+1) \leq 0\\ &\iff x \in [-1,1]\end{aligned}$$

Or $x \in \{-1\} \cup [0, +\infty[$. Ainsi, l'ensemble des solutions de R_7 est

$$\boxed{S_{R_7} = [-1,1] \cap (\{-1\} \cup [0, +\infty[) = \{-1\} \cup [0,1]}$$

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(R_8) : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} > x$$

Etudions les signes des éléments. Tout d'abord, $\sqrt{x+1}$ est une racine, c'est donc un réel positif. Par ailleurs, pour que $\sqrt{x+1}$ soit bien défini, il est nécessaire que $x+1$ soit positif aussi. Pour que la fraction soit bien définie il faut que $\sqrt{x+1}$ soit non nul, donc $x \neq -1$ Ainsi, (R_8) est bien définie sur $]-1, +\infty[$. Donc le membre de droite, x n'est pas nécessairement positif, il faut faire une disjonction de cas :

CAS 1 : $x < 0$ Dans ce cas x n'est pas solution car $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \geq 0$

CAS 2 : $x \geq 0$ Les deux membres sont positifs, on peut mettre au carré : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}(R_8) &\iff \frac{2}{x+1} > x^2\\ &\iff \frac{2-x^3-x^2}{x+1} \leq 0\\ &\iff \frac{x^3+x^2-2}{x+1} \geq 0\end{aligned}$$

Il faut ensuite trouver les racines de x^3+x^2-2. 1 est racine évidente, on peut donc factoriser par $x-1$. On obtient

$$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2)$$

Le discriminant de x^2+2x+2 est négatif, donc x^2+2x+2 n'admet pas de racine réelle, donc $x^2+2x+2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.Donc

$$(R_8) \iff \frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

Un tableau de signes donne comme solution $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$, on conclut en intersectant avec l'ensemble de définition de R_8

$$\boxed{S_{R_8}=[1,+\infty[}$$

Points à retenir

— Les implications et les équivalences entre deux propositions.

— Les disjonctions de cas.

— La condition pour mettre au carré. (signe)

— Les règles de calculs sur les racines.

V Valeurs absolues

La fonction valeur absolue, noté $|\cdot|$ est souvent utilisée, sa définition est très simple, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{sinon}\end{cases}$$

Ainsi, il faudra souvent distinguer les cas dès lors que l'on ne connaît pas le signe des expressions dans les valeurs absolues.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(V_1):\quad |x|=1,\quad (V_2):\quad |x+1|=-1,\quad (V_3):\quad |x+1|=\sqrt{x}.$$

$$(V_4):\quad |x-1|\leq 1-2x,\quad (V_5):\quad |x+1|\leq|1-2x|,\quad (V_6):\quad ||x|-5|\geqslant||3x|-3|.$$

Correction 5. $\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (V_1) : $|x|=1$, <u>CAS 1 : $x<0$</u> Alors $|x|=-x$ et $(V_1)\iff -x=1$ donc

$$x=-1$$

<u>CAS 1 : $x\geq 0$</u> Alors $|x|=x$ et $(V_1)\iff x=1$ donc

$$x=1$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (V_1) est

$$\boxed{S_{V_1}=\{-1,1\}}$$

$\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (V_2) : $|x+1|=-1$, Comme $|x+1|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{S_{V_2}=\emptyset}$$

$\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (V_3) : $|x+1|=\sqrt{x}$. L'équation est définie pour tout $x\geq 0$ car $\sqrt{x}$ est définie sur cet ensemble. De plus les deux membres sont positifs, donc on peut passer au carré.

$$\begin{aligned}(V_3) &\iff |x+1|^2 = x\\ &\iff x^2+2x+1 = x\\ &\iff x^2+x+1=0\end{aligned}$$

Le discriminant de x^2+x+1 est négatif, donc $x^2+x+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, ainsi

$$\boxed{S_{V_3}=\emptyset}$$

$\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (V_4) : $\quad |x-1| = 1-2x$.
<u>CAS 1 : $x-1<0$, ie $x<1$</u> Dans ce cas $|x-1| = -x+1$ donc

$$\begin{aligned}(V_4) &\iff -x+1 = 1-2x\\ &\iff x=0\end{aligned}$$

On obtient donc 0 commme solution sur cet intervalle
<u>CAS 2 : $x-1\geq 0$, ie $x\geq 1$</u> Dans ce cas $|x-1| = x-1$ donc

$$\begin{aligned}(V_4) &\iff x-1 = 1-2x\\ &\iff 3x=2\\ &\iff x=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

On obtient donc $\frac{3}{2}$ comme solution sur cet intervalle
Ainsi l'ensmble des solutions de (V_4) est

$$\boxed{S_{V_4}=\{0,\tfrac{3}{2}\}}$$

Points à retenir

— La définition de la valeur absolue, son graphe.

— Les disjonctions de cas.

VI Changement de variables

Parfois, il est avantageux de changer l'expression de l'équation en remplaçant la variable par une autre. Cela permet notamment de se ramener aux cas précédents.

Exercice 6. Résoudre

(CV_1) : $\quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$

(CV_2) : $\quad x^4-3x^2+2=0$

(CV_3) : $\quad x^4-3x^2+2\geq 0$

(CV_4) : $\quad \frac{1}{e^x-1}\leq e^x+1$

(CV_5) : $\quad \frac{1}{\ln(x)-1}\leq \ln(x)+1$

Correction 6. $\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (CV_1) : $\quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$.

$\sqrt{x}$ est défini sur $\mathbb{R}_+$ et par ailleurs, la fraction est définie si $\sqrt{x}-1\neq 0$, c'est-à-dire, $x\neq 1$, donc (CV_1) est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

On remarque que si on remplace $\sqrt{x}$ par une variable X, on tombe sur une équation rationnelle simple. On pose donc $X = \sqrt{x}$ on a alors :

$$x \text{ solution de } (CV_1) \iff X \text{ solution de } \frac{X}{X-1} = X + 1.$$

On tombe sur une AUTRE équation : (E) : $\frac{X}{X-1} = X + 1$, c'est celle là que l'on va résoudre, puis on reviendra à la variable x à la toute fin à l'aide de l'équivalence précédente.

$$\begin{aligned}(E) &\iff \frac{X}{X-1} - (X+1) = 0 \\ &\iff \frac{X - X^2 + 1}{X-1} = 0 \\ &\iff \frac{X^2 - X - 1}{X-1} = 0\end{aligned}$$

$X^2 - X - 1$ admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Les solutions de (E) sont donc

$$S_E = \{r_1, r_2\}$$

On n'a PAS répondu à la question ! ! Il faut maintenant revenir à la variable x. Rappelons que l'on a :

$$x \text{ solution de } (CV_1) \iff X \text{ solution de } (E)$$

Or

$$\begin{aligned}X \text{ solution de } (E) &\iff X \in \{r_1, r_2\} \\ &\iff \sqrt{x} \in \{r_1, r_2\}\end{aligned}$$

Il faut donc résoudre :

$$\sqrt{x} = r_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} = r_2$$

Pour $\sqrt{x} = r_1$ les deux membres sont positifs, on obtient $x = r_1^2$

Pour $\sqrt{x} = r_2$ le membre de gauche est positif et le membre de droite est négatif (pourquoi ?), il n'y a donc pas de solution.

Ainsi,

$$\begin{aligned}x \text{ solution de } (CV_1) &\iff \sqrt{x} \in \{r_1, r_2\} \\ &\iff x = r_1^2\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (CV_1) est donc

$$\boxed{S_{CV_1} = \{r_1^2\}}$$

(on peut calculer r_1^2, on obtient : $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)

⋆ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation (CV_3) : $x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$ Nous remarquons ici que l'on transforme en une équation de degré 2 l'équation de degré 4 à l'aide du changement de variable $X = x^2$

On pose donc $X = x^2$ on a alors :

$$x \text{ solution de } (CV_3) \iff X \text{ solution de } X^2 + 3X + 2 \geq 0$$

On tombe sur une AUTRE équation : $(E) : X^2+3X+2 \geq 0$, c'est celle là que l'on va résoudre, puis on reviendra à la variable x à la toute fin à l'aide de l'équivalence précédente.

X^2+3X+2 admet deux racines réelles : -1 et -2, donc

$$\begin{aligned}(E) &\iff (X+1)(X+2) \geq 0\\ &\iff X \in]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc

$$S_E =]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[$$

On n'a PAS répondu à la question !! Il faut maintenant revenir à la variable x. Rappelons que l'on a :

$$x \text{ solution de } (CV_3) \iff X \text{ solution de } (E)$$

Or

$$\begin{aligned}X \text{ solution de } (E) &\iff X \in]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[\\ &\iff x^2 \in]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[\end{aligned}$$

Il faut donc résoudre :

$$x^2 \leq -2 \quad \text{et} \quad x^2 \geq -1$$

On remarque que $x^2 \leq -2$ n'admet pas de solution et $x^2 \geq -1$ a pour solution $\mathbb{R}$.

Ainsi

$$x \text{ solution de } (CV_3) \iff x \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions de (CV_3) est

$$\boxed{S_{CV_3} = \mathbb{R}}$$

Points à retenir

— Savoir trouver un changement de variable.

— Passer des solutions de l'équation originale à celle où l'on a changé la variable.

VII Paramètres

Cette fois-ci il ne s'agit plus de résoudre une seule équation mais une infinité à la fois !! Pour chaque valeur du paramètre on a une nouvelle équation. Résoudre une équation à paramètre consiste à donner pour chaque valeur du paramétre l'ensemble des solutions. A la fin il faut pouvoir dire (simplement) : 'Si λ vaut 12, voici les solutions ....', ' Si λ vaut -1 voici les solutions....'. Parfois, pour toutes les valeurs du paramètre les solutions s'expriment de la même manière, parfois il faudra au contraire faire des disjonctions de cas.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(P_1(\lambda)) : \quad \lambda x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad (P_3(\lambda)) : \quad x-1 = 2\lambda x + 1$ $\quad (P_5(\lambda)) : \quad |x-\lambda| = \frac{1}{2}x+1$

$(P_2(\lambda)) : \quad \frac{1}{x+\lambda} \geq x - \lambda$ $\quad (P_4(\lambda)) : \quad x-1 < 2\lambda x + 1$

Correction 7. $\star$ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $(P_1(\lambda))\lambda x^2+2x+1=0$

Cette équation est une équation du second degré SI $\lambda \neq 0$. Ainsi on va faire une disjonction de cas :

CAS 1 si $\lambda = 0$

L'équation se ramène à : $(P_1(0))$: $2x+1=0$ dont les solutions sont si $\lambda=0$,

$$S=\{\frac{-1}{2}\}$$

CAS 2 si $\lambda \neq 0$

L'équation est du second degré, de discriminant : $4-4\lambda$. On est ramené à la disjonction classique sur le signe du discriminant :

CAS 2.1 si $4-4\lambda<0$, ie $\lambda>1$

Dans ce cas, λx^2+2x+1 n'admet pas de racine réelle, et l'équation n'admet donc pas de solution.

CAS 2.2 si $4-4\lambda=0$, ie $\lambda=1$

Dans ce cas, λx^2+2x+1 admet une unique racine réelle -1 et l'unique solution de $P_1(1)$ est $\{-1\}$

CAS 2.3 si $4-4\lambda>0$, ie $\lambda<1$

Dans ce cas, λx^2+2x+1 admet deux racines réelles, à savoir

$$r_1(\lambda)=\frac{-2+\sqrt{4-4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad r_2(\lambda)=\frac{-2-\sqrt{4-4\lambda}}{2\lambda}$$

Si $\lambda\in]-\infty,0[\cup]0,1[$,

$$S=\{r_1(\lambda),r_2(\lambda)\}$$

On récapitule,

Valeur de λ	Ensemble des solutions
$\lambda\in]-\infty,0[\cup]0,1[$	$\{r_1(\lambda),r_2(\lambda)\}$
$\lambda=0$	$\{\frac{-1}{2}\}$
$\lambda=1$	$\{-1\}$
$\lambda\in]1,+\infty[$	$\emptyset$

Points à retenir

— Ne pas confondre le paramètre avec l'inconnue !

— Résoudre une équation à paramètre c'est résoudre beaucoup d'équations à la fois. On donne pour chaque valeur du paramètre l'ensemble des solutions.

— Organiser au mieux les disjonctions de cas.

VIII Par étude de fonctions

Quand une équation comporte des fonctions analytiques ($\ln, \sin, \exp\ldots$) et des termes polynomiaux, alors il parfois judicieux d'étudier une fonction afin de la résoudre. Souvent, l'énoncé des exercices indique qu'il faut prouver une inégalité sur un intervalle, cela revient à montrer que l'ensemble des solutions d'une équation contient justement cet intervalle.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x>-1$:

$$\ln(x+1)\leq x$$

Montrer que pour tout $x\geq 0$:

$$\sin(x)\leq x$$

Montrer que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\sin(x)\geq\frac{2x}{\pi}$$

Correction 8. Afin de résoudre cette inégalité on va étudier la différence des deux membres, c'est-à-dire la fonction :

$$D(x) = \ln(x+1) - x$$

On doit chercher les valeurs pour lesquelles $D(x) \leq 0$.

D est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$D'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$$

Donc $D'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 0$, on a ainsi le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$D'(x)$		$+$	0	$-$	
$D(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On voit ainsi que $\forall x > -1$, $D(x) \leq D(0) = 0$. Ainsi on a prouvé que $\forall x > -1$,

$$\ln(x+1) \leq x$$

Autrement dit l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{]-1,+\infty[}$$

Pour l'équation I_2, on peut soit étudier la fonction $D_2(x) = e^x - 1 - x$, soit faire le changement de variable $x = \ln(X+1)$ pour se ramener à l'équation précédente.

Points à retenir

- Montrer une inégalité sur un ensemble I revient à résoudre une inéquation et montrer que l'ensemble des solutions est tout l'ensemble I.
- Etudier la différence des membres d'une inégalité afin de comparer à 0

IX Un peu de tout

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x

(T_1) : $(x^2-1)e^x - (x^2-1)e^{(x^2)} \geq 0$

(T_2) : $xe^x - x \leq 0$

(T_3) : $xe^x - x \leq 0$

(T_4) : $\dfrac{e^x(e^{2x}+1) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0$

Exercice 10. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x+1$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{2x} - x \geq 0.$$