Correction TD 0 - Résolution d'équations

Entraînements

Exercice 1. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$
6. $\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x-1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq \dfrac{3x-2}{1+x}$
11. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}$

Correction 1. **Résolution d'équations et d'inéquations avec des polynômes.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0}$:** Correction Video
   1 est racine évidente et on obtient : $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+6) \geq 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = [-3,-2] \cup [1,+\infty[.}$
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3 - x^2 - x - 2 < 0}$:**
   2 est racine évidente et on obtient :$x^3 - x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+1) < 0$ et le discriminant de x^2+x+1 est négatif donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 2[.}$
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3) > 0}$:**Correction Video
   On factorise par $3x-1$ et on obtient :
   $$(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3) > 0 \Leftrightarrow (3x-1)\left[x+2-2(4x+3)\right] > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-7x-4) > 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{4}{7}, \frac{1}{3}\right[.}$
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{32x^6 - 162x^2 < 0}$:**
   On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable a^2-b^2 et on obtient :
   $$32x^6 - 162x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(16x^4-81) < 0 \Leftrightarrow 2x^2(4x^2-9)(4x^2+9) < 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\setminus \{0\}.}$
5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}}$:**
   On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2-1 \neq 0$ et $4x^2-4x+1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{2x+1}{(2x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\mathbf{x^4+x}}{\mathbf{x^4-5x^2+4}}<\mathbf{1}$:** Correction Video
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4-5x^2+4\neq 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1)\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1,2\}$.
On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
$$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4}-1<0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)}<0.$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=]-2,-1[\cup\left]-1,\frac{4}{5}\right[\cup]1,2[.}$
7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2x^2-4x+2=1-x}$:**
$2x^2-4x+2=1-x \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$ donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2},1\right\}}$.
8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(x-1)^2\leq 1}$:**
$(x-1)^2\leq 1 \Leftrightarrow x(x-2)\leq 0$ donc $\boxed{\mathcal{S}=[0,2]}$.
9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-2}}\leq\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x}}$:** Correction Video
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $2x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.
De plus, on a : $\frac{1}{x-2}\leq\frac{1}{2x}\Leftrightarrow\frac{x+2}{2x(x-2)}\leq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-2]\cup]0,2[}$.
10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{1+x}}\geq\frac{\mathbf{3x-2}}{\mathbf{1+x}}$:** Correction Video
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x+1\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$\frac{2x+1}{x+1}\geq\frac{3x-2}{1+x}\Leftrightarrow\frac{-x+3}{1+x}\geq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=]-1,3]}$.
11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\mathbf{x^2+10x-4}}{\mathbf{x-2}}\leq\frac{\mathbf{16x+2}}{\mathbf{x+1}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+1\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.
$\frac{x^2+10x-4}{x-2}\leq\frac{16x+2}{x+1}\Leftrightarrow\frac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)}\leq 0$ donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-1[\cup[0,2[}$.

Exercice 2. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x\mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x)$
2. $\ln(1+e^{-x})<x$
3. $|\ln x|<1$
4. $\ln(2x+4)-\ln(6-x)=\ln(3x-2)-\ln(x)$
5. $e^{3x}-6e^{2x}+8e^x>0$
6. $2^{2x+1}+2^x=1$
7. $e^{3x}-e^{2x}-e^{x+1}+e\leq 0$.
8. $(\ln x)^2-3\ln x-4\leq 0$
9. $2e^{2x}-e^x-1\leq 0$
10. $2\ln(x)+\ln(2x-1)>\ln(2x+8)+2\ln(x-1)$
11. $4e^x-3e^{\frac{x}{2}}\geq 0$
12. $e^x-e^{-x}=3$
13. $9^x-2\times 3^x-8>0$

Correction 2. **Résolution d'équations et d'inéquations avec $\ln$, $\exp$ et $x\mapsto a^x$.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{x^2-4e^2})<\mathbf{1}+\ln(\mathbf{3x})$:**

   ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=]2e,+\infty[$

- $\star$ On a : $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x) \Leftrightarrow x^2-3xe-4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]2e, 4e[}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{1}+\mathbf{e}^{-\mathbf{x}}) < \mathbf{x}$:**

   - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
   - $\star$ $\ln(1+e^{-x}) < x \Leftrightarrow 1+e^{-x} < e^x \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-1 > 0$. On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à la résolution d'une inéquation du second degré. On obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left]\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), +\infty\right[}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\ln \mathbf{x}| < \mathbf{1}$:**

   - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - $\star$ On distingue deux cas :
     - Si $x \geq 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, donc $\mathcal{S}_\infty = [1, e[$.
     - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, donc $\mathcal{S}_2 = \left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

     Ainsi, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{e}, e\right[}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{2x}+\mathbf{4}) - \ln(\mathbf{6}-\mathbf{x}) = \ln(\mathbf{3x}-\mathbf{2}) - \ln(\mathbf{x})$:**

   - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \left]\frac{2}{3}, 6\right[$.
   - $\star$ En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x+4)] = \ln[(3x-2)(6-x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4) = (3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{6}{5}, 2\right\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e}^{\mathbf{3x}} - \mathbf{6e}^{\mathbf{2x}} + \mathbf{8e}^{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$:**

   - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - $\star$ On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à résoudre $X^3 - 6X^2 + 8X > 0 \Leftrightarrow X(X-2)(X-4) > 0$. Un tableau de signe donne que c'est équivalent à : $0 < X < 2$ ou $X > 4$ ce qui est équivalent à : $e^x < 2$ ou $e^x > 4$ car une exponentielle est toujours strictement positive. La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, \ln(2)[\cup] \ln 4, +\infty[}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2}^{\mathbf{2x}+\mathbf{1}} + \mathbf{2}^{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$:**

   - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - $\star$ On a : $2^{2x+1} + 2^x = 1 \Leftrightarrow 2 \times (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0$. On pose $X = 2^x$, et on doit résoudre

$2X^2+X-1=0$. Le discriminant est 9 et les racines sont ainsi -1 et $\frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
2^{2x+1}+2^x=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x\ln 2}=-1 \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \qquad \text{car } e^{x\ln 2}>0 \\
&\Leftrightarrow \quad x\ln 2=-\ln 2 \qquad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow \quad x=-1.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1\}}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^{3x}-e^{2x}-e^{x+1}+e\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit alors résoudre $X^3-X^2-eX+e\leq 0$. On remarque que 1 est racine évidente et ainsi on peut factoriser par 1. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $X^3-X^2-eX+e\leq 0 \Leftrightarrow (X-1)(X^2-e)\leq 0$. Un tableau de signe donne $X\leq -\sqrt{e}$ ou $X\in[1,\sqrt{e}]$. On doit donc résoudre $e^x\leq -\sqrt{e}$ ou $e^x\in[1,\sqrt{e}]$. Or une exponentielle est toujours strictement positive donc on doit résoudre $e^x\in[1,\sqrt{e}]$. En composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $x\in[0,\ln(\sqrt{e})]\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[0,\frac{1}{2}\right].}$

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(\ln x)^2-3\ln x-4\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}^{+\star}$.
   - ⋆ On pose $X=\ln(x)$ et on doit alors résoudre $X^2-3X-4\leq 0$. Le discriminant vaut $\Delta=25$ et les racines sont -1 et 4. Ainsi, un tableau de signe donne que : $X^2-3X-4\leq 0\Leftrightarrow -1\leq X\leq 4$. On doit donc résoudre $-1\leq \ln(x)\leq 4$. En composant par la fonction exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient que : $e^{-1}\leq x\leq e^4$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[e^{-1},e^4\right].}$

9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2e^{2x}-e^{x}-1\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit résoudre $2X^2-X-1\leq 0$. On obtient $X\in\left]-\frac{1}{2},1\right[$, soit $e^x>-\frac{1}{2}$ et $e^x<1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x<0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,0]}$.

10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2\ln(x)+\ln(2x-1)>\ln(2x+8)+2\ln(x-1)}$:**

    - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=]1,+\infty[$.

- $\star$ En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2 - 14x + 8 < 0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathcal{S} =]1, 2[}$.

11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0}$:**

    - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
    - $\star$ On pose $X = e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2 - 3X \geq 0 \Leftrightarrow X(4X-3) \geq 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}} \leq 0$ ou $e^{\frac{x}{2}} \geq \dfrac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathcal{S} = \left[2\ln\left(\dfrac{3}{4}\right), +\infty\right[}$.

12. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^x - e^{-x} = 3}$:**

    - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
    - $\star$ On met tout sur le même dénominateur et on obtient : $\dfrac{e^{2x} - 3e^x - 1}{e^x} = 0$. On pose $X = e^x$ et on doit donc résoudre $X^2 - 3X - 1 = 0$. En repassant à x, on obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}}$.

13. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0}$:**

    - $\star$ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
    - $\star$ On peut remarquer que : $9^x = (3^x)^2$. Ainsi on pose $X = 3^x$ et on obtient que : $X^2 - 2X - 8 > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 36$ et les racines sont -2 et 4. Ainsi on doit résoudre $3^x < -2$ ou $3^x > 4$. Or on sait que $3^x = e^{x\ln 3}$ ainsi la première inéquation est impossible et la deuxième inéquation donne : $3^x > 4 \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$ en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3 > 0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[}$.

Exercice 3. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

Correction 3.

1. **Valeurs de a pour que R(a) soit bien défini :**
   Pour que $R(a)$ soit bien définie, il faut déjà que $a - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $a \geq 1$. On suppose donc que $a \geq 1$. Sous cette hypothèse, on a donc que $a + 2\sqrt{a-1} > 0$ comme somme d'un terme strictement positif et d'un autre terme positif. Il reste à étudier $a - 2\sqrt{a-1}$.
   $$a - 2\sqrt{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a-1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$
   On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux termes sont bien positifs. Le discriminant de la dernière inéquation est strictement négatif ($\Delta = -4$) et ainsi, on a $a^2 - 2a + 1 > 0$, d'où $a - 2\sqrt{a-1} > 0$. Finalement, on obtient
   $$\boxed{\mathcal{D}_R = [1, +\infty[.}$$
2. **Simplifions R(a) :**
   On suppose donc que $a \geq 1$. Ainsi, $R(a)$ a bien un sens et on peut calculer $R(a)^2$. On obtient
   $$R(a)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2} = 2a + 2|a-2|.$$

Ainsi, si $1 \leq a \leq 2$, on obtient

$$R(a)^2 = 2a + 2(-a+2) = 4 \quad \text{donc} \quad R(a) = 2$$

car $R(a) = -2$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées). Et si $a \geq 2$, on obtient

$$R(a)^2 = 2a + 2(a-2) = 4(a-1) \quad \text{donc} \quad R(a) = 2\sqrt{a-1}$$

car $R(a) = -2\sqrt{a-1}$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées).
On a donc obtenu :

$$\boxed{\forall a \geq 1,\ R(a) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}}$$

Exercice 4. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Correction 4. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

Exercice 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propositions suivantes

$$P_1(f) : \text{"}\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M\text{"}$$

$$P_2(f) : \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)\text{"}$$

$$P_3(f) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(y)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propositions
2. Dire si ces propositions sont vraies ou fausses pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right. , \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

   On justifiera, dans le cas où les propositions sont vraies, en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$

Correction 5. 1.

$$NON(P_1(f)) : \text{"}\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M\text{"}$$

$$NON(P_2(f)) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(y)\text{"}$$

$$NON(P_3(f)) : \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, f(x) < f(y)\text{"}$$

2. Pour f

- $P_1(f)$ est vrai, il suffit de prendre $M = 2$.
- $P_2(f)$ est faux.
- $P_3(f)$ est vrai, il suffit de prendre $y = 1$.

Pour g

- $P_1(g)$ est faux.
- $P_2(g)$ est vrai, il suffit de prendre $x = 1$ et $y = 2$.
- $P_3(g)$ est faux.

Pour h

- $P_1(h)$ est vrai il suffit de prendre $M = 2$.
- $P_2(h)$ est vrai, il suffit de prendre $x = -\pi$ et $y = 0$.
- $P_3(h)$ est vrai, il suffit de prendre $y = \pi$.

Type DS

Exercice 6. On souhaite résoudre l'inéquation suivante

$$I(a) \quad : \quad ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1 \geq 0$$

d'inconnue x et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. A quelle.s condition.s sur a cette inéquation n'est-elle pas de degré 2 ? La résoudre pour la.les valeur.s correspondante.s

   Dans toute la suite de l'exercice nous supposerons que a est tel que l'inéquation est de degré 2.
2. Montrer alors que le discriminant de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ en tant que polynome du second degre en x, vaut
$$\Delta(a) = 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1$$
3. Montrer que $\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2$
4. (a) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des solutions de $\Delta(a) = 0$. Déterminer $\mathcal{M}$

   (b) Résoudre $I(a)$ pour $a \in \mathcal{M}$.

   On suppose désormais que $a \notin \mathcal{M}$.
5. (a) Justifier que $\Delta(a) > 0$ et exprimer $\sqrt{\Delta(a)}$ à l'aide de valeur absolue.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$
   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ est
$$R = \left\{\frac{1}{a}, 2a - 1\right\}$$
   On note
$$r_1(a) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad r_2(a) = 2a - 1$$
6. Résoudre $r_1(a) \geq r_2(a)$.
7. Conclure en donnant les solutions de $I(a)$ en fonction de a.

Correction 6.

1. L'équation n'est pas de degré 2 si et seulement si $a = 0$. Dans ce cas, l'inéquation devient
$$I(0) \quad : \quad -x - 1 \geq 0$$
   dont les solutions sont
$$\boxed{\mathcal{S}_0 =]-\infty, -1]}$$
2. Le discriminant vaut
$$\begin{aligned}\Delta(a) &= (-2a^2 + a - 1)^2 - 4a(2a-1) \\ &= (4a^4 + a^2 + 1 - 4a^3 + 4a^2 - 2a) - 8a^2 + 4a \\ &= 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1\end{aligned}$$
3. Développons l'expression proposée :
$$\begin{aligned}(a-1)^2(2a+1)^2 &= (a^2 - 2a + 1)(4a^2 + 4a + 1) \\ &= (4a^4 + 4a^3 + a^2) + (-8a^3 - 8a^2 - 2a) + (4a^2 + 4a + 1) \\ &= 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1\end{aligned}$$
   On retrouve bien l'expression obtenue dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, d'après la question précédente $\Delta(a)$ est le produit de deux carrés, et donc vérifie $\Delta(a) \geq 0$
On a par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2} = |x|$, donc
$$\boxed{\sqrt{\Delta(a)} = |a-1||2a+1|}$$
5. Etudions ces ensembles en fonction du signe de x.
<u>Si $x \geq 0$</u>
$|x| = x$ et donc
$$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$
<u>Si $x < 0$</u>
$|x| = -x$ et donc
$$\{|x|, -|x|\} = \{-x, x\} = \{x, -x\}$$
(un ensemble n'est pas ordonné)
Ainsi on a bien l'égalité voulue.
6. L'ensemble des deux racines est donc
$$R = \left\{ \frac{2a^2 - a + 1 + \sqrt{\Delta(a)}}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - \sqrt{\Delta(a)}}{2a} \right\}$$
Ce qui d'après la question 4a) donne
$$R = \left\{ \frac{2a^2 - a + 1 + |a-1||2a+1|}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - |a-1||2a+1|}{2a} \right\}$$
Et donc d'après la question 4b) cet ensemble est égal à
$$R = \left\{ \frac{2a^2 - a + 1 + (a-1)(2a+1)}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - (a-1)(2a+1)}{2a} \right\}$$
Enfin on a
$$(a-1)(2a+1) = 2a^2 - a - 1$$
et donc
$$R = \left\{ \frac{2a^2 - a + 1 + (2a^2 - a - 1))}{2a}, \frac{2a^2 - a + 1 - (2a^2 - a - 1)}{2a} \right\}$$
On calcule alors séparément ces deux expressions :
$$\frac{2a^2 - a + 1 + (2a^2 - a - 1))}{2a} = \frac{4a^2 - 2a}{2a} = 2a - 1$$
et
$$\frac{2a^2 - a + 1 - (2a^2 - a - 1))}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$
On obtient bien
$$\boxed{R = \left\{\frac{1}{a}, 2a - 1\right\}}$$

7. Résolvons l'inéquation de l'énoncé :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \geq 2a-1 \\ \iff & \frac{1}{a} - 2a + 1 \geq 0 \\ \iff & \frac{1-2a^2+a}{a} \geq 0 \\ \iff & \frac{2a^2-a-1}{a} \leq 0 \\ \iff & \frac{(2a+1)(a-1)}{a} \leq 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc (faire un tableau de signes dans le doute)

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, \tfrac{-1}{2}] \cup]0,1]}$$

8. Pour $a \in]-\infty, \frac{-1}{2}]$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a = [r_2(a), r_1(a)]}$$

Pour $a \in]\frac{-1}{2}, 0[$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a = [r_1(a), r_2(a)]}$$

Pour $a = 0$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_0 =]-\infty, -1]}$$

Pour $a \in]0,1]$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a =]-\infty, r_2(a)] \cup [r_1(a), +\infty[}$$

Enfin, pour $a \in]1, +\infty[$ les solutions de $I(a)$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_a =]-\infty, r_1(a)] \cup [r_2(a), +\infty[}$$

Exercice 7. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :

$$P(x) = 0 \iff y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$

3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.

Correction 7. 1. Résolvons l'équation proposée en fonction du paramètre x. On a

$$\begin{aligned} & y + \tfrac{2}{y} &= x \\ \iff & y^2 + 2 &= yx \\ \iff & y^2 - xy + 2 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de ce polynome de degré 2 on obtient

$$\Delta = x^2 - 8$$

Donc :

— si $x^2-8>0$ c'est-à-dire si $|x|>2\sqrt{2}$, l'équation admet 2 solutions.
— si $x^2-8=0$ c'est-à-dire si $x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$ l'équation admet 1 seule solution.
— si $x^2-8<0$ c'est-à-dire si $x\in]-2\sqrt{2},22\sqrt{2}[$ l'équation admet 0 solution.

2. Soit $x=y+\frac{2}{y}$, on a :

$$\begin{aligned} & P(x) &= 0\\ \iff & \left(y+\tfrac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\tfrac{2}{y}\right)-9 &= 0\end{aligned}$$

Développons à part $\left(y+\frac{2}{y}\right)^3$. On obtient tout calcul fait

$$\left(y+\frac{2}{y}\right)^3=y^3+6y+\frac{12}{y}+\frac{8}{y^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left(y+\tfrac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\tfrac{2}{y}\right)-9 &= 0\\ \iff & y^3+\tfrac{8}{y^3}-9 &= 0\\ \iff & y^6+8-9y^3 &= 0\end{aligned}$$

où la dernière équivalence s'obtient en multipliant par y^3 non nul.

3. On résout $z^2-9z+8=0$ à l'aide du discriminant du polynôme z^2-9z+8 qui vaut $\delta=81-32=49=7^2$. On a donc deux solutions

$$\boxed{z_1=\tfrac{9+7}{2}=8 \quad \text{et} \quad z_2=\tfrac{9-7}{2}=1}$$

4. La question d'avant montre que $\sqrt[3]{1}=1$ est solution de l'équation $y^6-9y^3+8=0$ (on peut le vérifier à la main si on veut, mais c'était le but de la question précédente.)
Comme on a effectué le changement de variable $x=y+\frac{2}{y}$ et à l'aide de la question 2, on voit que $x=1+\frac{2}{1}=3$ est solution de l'équation $P(x)=0$ c'est-à-dire que

$$\boxed{3 \text{ est une racine de } P.}$$

(de nouveau on pourrait le revérifier en faisant le calcul, mais ceci n'est psa nécéssaire)

5. Comme 3 est racine de P, on peut écrire $P(x)$ sous la forme $(x-3)(ax^2+bx+c)$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. En développant on obtient $P(x)=ax^3+(-3a+b)x^2+(c-3b)x-3c$. Maintenant par identification on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ -3a+b &=& 0\\ c-3b &=& -6\\ -3c &=& -9\end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b &=& 3\\ c &=& 3\\ c &=& 3\end{array}\right.$$

Et finalement

$$P(x)=(x-3)(x^2+3x+3)$$

Il nous reste plus qu'à trouver les racines de x^2+3x+3 que l'on fait grâce à son discriminant qui vaut $\Delta=9-12<-3$.

$\boxed{\text{L'unique racine réelle de } P \text{ est } 3}$

Je rajoute le graphique de la courbe représentative de P avec le programme Python qui permet de le tracer.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def P(x):
    return(x**3-6*x+9)
X=np.linspace(-5,5,100)
Y=P(X)
Z=np.zeros(100)
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```