Chapitre 0 : Résolution d'équations

Table des matières

I Quantificateurs

Définition 1. Une propriété est un énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguité s'il est vrai ou faux.

Certaines propriétés ne dépendent pas de variables :

— P_1 : "$3 > \pi$", P_1 est fausse.

— P_2 : "La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. P_2 est vraie.

Mais il est courant qu'elles en dépendent :

— $P_1(x)$: "$3 > x$". Ici, $P_1(2)$ est vraie et $P_1(\pi)$ est fausse.

— $P_2(f)$: "La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$". Ici, $P_2(\exp)$ est vraie, $P_2(x \mapsto x^2)$ est fausse.

Les (in)-équations sont des propriétés mathématiques contenant une (in)-égalité entre deux expressions mathématiques. Résoudre une (in)-équation c'est donné sous la forme la plus simple possible toutes les valeurs pour lesquelles cette propriété est vérifiée. Dans ce chapitre, on se restreindra au cas où les équations contiennent une seule inconnue réelle. On considérera dans d'autres chapitres le cas où les variables sont plusieurs réelles (systèmes linéaires) ou mêmes des fonctions (équations différentielles).

On utilisera dans la suite du cours les quantificateurs suivants :

Définition 2. Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'une variable $x \in E$.

- $\forall$ se lit 'quelque soit' ou 'pour tout'. Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists$ se lit 'il existe'. Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$

Depuis le début du siècle, tous les objets mathématiques sont décrits en utilisant le langage des ensembles. Ensembles de nombres, ensembles de points, ensembles de fonctions, etc...

On ne définit pas la notion d'ensemble. Nous allons simplement préciser les notations et les règles pour utiliser ce langage de façon sûre.

Quand on a des ensembles avec un nombre fini d'élément on peut les écrire à la main, par exemple $E = \{1, 4, 28\}$ est un ensemble à trois éléments contenant, 1, 4 et 28.

Pour les ensembles avec une infinité d'éléments c'est plus difficile pour les décrire. Certains ont déjà des notations communément acceptées :

- $\mathbb{N}$ les entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$ les rationnels
- $\mathbb{R}$ les réels

On en verra d'autres au cours de l'année.

Si on se donne un ensemble E et une propriété P, on peut former un nouvel ensemble F constitué des éléments de E qui vérifient la propriété P. Cela s'écrit :

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}$$

Les intervalles sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$, de la forme

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

(ou $x \leq a$, ou $x > a$, ou $a < x \leq b$...) Ils ont une notation spéciale :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$$

Les autres intervalles ont une notation similaire (eg. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$...), on les verra durant les exercices.

Pour finir, un petit dernier ensemble un peu particulier, l'ensemble avec 0 élément, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$.

II Equations polynomiales

C'est quoi résoudre une équation ?

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$, consiste à caractériser sous forme d'ensemble le plus simple possible (des intervalles par exemples) les valeurs pour lesquelles la propriété définie par l'équation est vraie.

Résoudre $x + 1 > 2x - 1$, c'est donc décrire l'ensemble $S = \{x \mid x + 1 > 2x - 1\}$ le plus simplement possible. On obtient $S = \{x \mid 2 > x\}$ soit

$$S =]-\infty, 2[$$

Si on appelle $E(x)$ la proposition : "$E(x) : x + 1 > 2x - 1$" on peut donc dire

$$\forall x \in S, E(x) \text{ est vraie}$$

$$\forall x \notin S, E(x) \text{ est fausse}$$

De façon "concrète" on omet généralement la dépendance en la variable de l'équation, on note par exemple $E : x + 1 > 2x - 1$ l'équation et on donne l'ensemble des solutions

$$S_E =]-\infty, 2[$$

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$(E_1)\quad x^2+3x+2=0 \qquad (E_3)\quad x^2+3x+2\geq 0 \qquad (E_5)\quad x^2+2x+1\leq 0$

$(E_2)\quad x^2+2x+1=0 \qquad (E_4)\quad x^2+2x+1\geq 0 \qquad (E_6)\quad x^2+2x+2<0$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(P_1):\quad x^3+3x^2+2x=0,\quad (P_2)\quad x^3-3x+2=0,\quad (P_3)\quad x^4+2x^2+1\geq 0$$

Points à retenir

— La formule du discriminant et des racines.

— La factorisation quand on obtient une racine.

— L'écriture des solutions sous forme d'intervalles ou d'ensembles.

— Les identités remarquables.

III Equations rationnelles

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(Q_1):\quad \frac{-2}{x+3}=x,\quad (Q_2):\quad \frac{-2}{x+3}\leq x,\quad (Q_3):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{x+2}$$

$$(Q_4):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{x-1},\quad (Q_5):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

Points à retenir

— La mise au même dénominateur.

— La condition pour multiplier une inéquation. (signe)

— Les règles de calculs sur les fractions.

— L'utilisation d'un tableau de signes

IV Equations avec des radicaux

Mettre au carré une équation n'est pas une opération simple ! En effet, voici le problème qui se pose, pour quelles valeurs de (a,b) a-t-on

$$a=b\Longleftrightarrow a^2=b^2\ ?$$

La propriété précédente N'EST PAS VRAIE pour tout a,b dans $\mathbb{R}$! !

On a seulement

$$\forall\, a\geq 0,\, \forall\, b\geq 0,\quad a=b\Longleftrightarrow a^2=b^2$$

Il faut donc connaître les signes des expressions que l'on met au carré.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$(R_1):\quad \sqrt{x}=x$

$(R_2):\quad \sqrt{x+2}=x$

$(R_3):\quad \sqrt{x+1}=-x+1$

$(R_4):\quad \sqrt{x}<2x+1$

$(R_5):\quad \sqrt{x+2}\geq x$

$(R_6):\quad \sqrt{x-2}\geq x$

$(R_7):\quad \sqrt{x^2+x}\leq\sqrt{x+1}$

$(R_8):\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}>x$

Points à retenir

— Les implications et les équivalences entre deux propositions.

— Les disjonctions de cas.

— La condition pour mettre au carré. (signe)

— Les règles de calculs sur les racines.

V Valeurs absolues

La fonction valeur absolue, noté $|\cdot|$ est souvent utilisée, sa définition est très simple, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, il faudra souvent distinguer les cas dès lors que l'on ne connaît pas le signe des expressions dans les valeurs absolues.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(V_1) : \quad |x| = 1, \quad (V_2) : \quad |x+1| = -1, \quad (V_3) : \quad |x+1| = \sqrt{x}.$$

$$(V_4) : \quad |x-1| \leq 1-2x, \quad (V_5) : \quad |x+1| \leq |1-2x|, \quad (V_6) : \quad ||x|-5| \geqslant ||3x|-3|.$$

Points à retenir

— La définition de la valeur absolue, son graphe.

— Les disjonctions de cas.

VI Changement de variables

Parfois, il est avantageux de changer l'expression de l'équation en remplaçant la variable par une autre. Cela permet notamment de se ramener aux cas précédents.

Exercice 6. Résoudre

$(CV_1) : \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ $\qquad (CV_3) : \quad x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$ $\qquad (CV_5) : \quad \frac{1}{\ln(x)-1} \leq \ln(x)+1$

$(CV_2) : \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ $\qquad (CV_4) : \quad \frac{1}{e^x-1} \leq e^x$ $\qquad (CV_6) : \quad (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 1 = 0$

Points à retenir

— Savoir trouver un changement de variable.

— Passer des solutions de l'équation originale à celle où l'on a changé la variable.

VII Paramètres

Cette fois-ci il ne s'agit plus de résoudre une seule équation mais une infinité à la fois ! ! Pour chaque valeur du paramètre on a une nouvelle équation. Résoudre une équation à paramètre consiste à donner pour chaque valeur du paramétre l'ensemble des solutions. A la fin il faut pouvoir dire (simplement) : 'Si λ vaut 12, voici les solutions ....', ' Si λ vaut -1 voici les solutions....'. Parfois, pour toutes les valeurs du paramètre les solutions s'expriment de la même manière, parfois il faudra au contraire faire des disjonctions de cas.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(P_1(\lambda))$: $\lambda x^2 + 2x + 1 = 0$ $(P_3(\lambda))$: $x - 1 = 2\lambda x + 1$ $(P_5(\lambda))$: $|x - \lambda| = \frac{1}{2}x + 1$

$(P_2(\lambda))$: $\frac{1}{x+\lambda} \geq x - \lambda$ $(P_4(\lambda))$: $x - 1 < 2\lambda x + 1$ $(P_6(\lambda))$: $\exp(2x) + \lambda \exp(x) + 1 = 0$

Points à retenir

— Ne pas confondre le paramètre avec l'inconnue !

— Résoudre une équation à paramètre c'est résoudre beaucoup d'équations à la fois. On donne pour chaque valeur du paramètre l'ensemble des solutions.

— Organiser au mieux les disjonctions de cas.

VIII Par étude de fonctions

Quand une équation comporte des fonctions analytiques ($\ln, \sin, \exp...$) et des termes polynomiaux, alors il parfois judicieux d'étudier une fonction afin de la résoudre. Souvent, l'énoncé des exercices indique qu'il faut prouver une inégalité sur un intervalle, cela revient à montrer que l'ensemble des solutions d'une équation contient justement cet intervalle.

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'une étude de fonction

(I_1) : $\ln(x + 1) \leq x$ (I_3) : $\sin(x) \leq x$

(I_2) : $e^x - 1 \geq x$ (I_4) : $\sin(x) \geq \frac{\pi x}{2}$

Une façon assez similaire d'énoncé l'exercice serait de dire : Prouvez que pour tout $x > -1$, on a :

$$\ln(x + 1) \leq x$$

Points à retenir

— Montrer une inégalité sur un ensemble I revient à résoudre une inéquation et montrer que l'ensemble des solutions est tout l'ensemble I.

— Etudier la différence des membres d'une inégalité afin de comparer à 0

IX Un peu de tout

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x

(T_1) : $(x^2 - 1)e^x - (x^2 - 1)e^{(x^2)} \geq 0$ (T_3) : $xe^x - x \leq 0$

(T_2) : $\dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - 1 \leq 0$ (T_4) : $\dfrac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} \geq 0$

Exercice 10. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$.

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} - x \geq 0.$$

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x - 2x \geq 0.$$