Correction TD 1 - Fonctions usuelles

Entraînements

Exercice 1. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1$.

Correction 1. **Utilisation d'une étude de fonction.**

1. **Montrons que $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{x} - \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \leq \ln(\mathbf{1}+\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$:**
   On démontre l'inégalité en deux temps.
   - Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$:

     On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geq 0$. On obtient donc les variations suivantes en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	

     Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, à savoir $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.
   - On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.
2. **Montrons que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{e^x} - \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \geq \mathbf{1}$:**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = e^x - x.$$
   Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Justifions les limites aux bornes : on a : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. L'étude en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme dominant à savoir e^x et on obtient ainsi : $f(x) = e^x\left(1 - \frac{x^2}{2e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2e^x} = 0$. Ainsi par quotient, somme et produit de limite, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, 0 est le minimum de f atteint en $x = 0$ et donc la fonction f est toujours positive ou nulle. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1.}$$

Exercice 2. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$.
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.

Correction 2.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x - 1 > 0$ et $e^{2\ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]\frac{1}{2}, +\infty[}$.

   Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a :

   $$f(x) = x\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{2\ln(2x-1)}\right)^{\frac{3}{2}} = x\ln(e^{\frac{x}{4}}) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g = [1, +\infty[}$.

   On ne peux RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{2}\ln(x)$... De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$... et on ne peux rien faire avec $(\ln x)^2$.

Exercice 3. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (2x^2 - 4x + 5)e^x - xe^{(x^2)}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1) - x$
3. $f_3 : x \mapsto xe^{-x^2+x}$
4. $f_4 : x \mapsto x^2 e^{(-x^2)}$
5. $f_5 : x \mapsto x\ln(x)$
6. $f_6 : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

Type DS

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de f.
2. Calculer la dérivée de f en déduire que le signe de f' dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$

3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de g et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[\cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de f.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e.

Correction 3.

1. La fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction inverse est définie et dérivabel sur $\mathbb{R}^*$ et enfin $\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. On a pour tout $x \in D_f$
$$f'(x) = \frac{e^x \ln(x) - e^x \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{e^x}{\log^2(x)} g(x)$$
Comme poru tout $x \in D_f$, $\frac{e^x}{\log^2(x)} \geq 0$, le signe de f' est égal à celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$.
3. g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ Ainsi $g'(x)$ est positif prou tout $x \in]0, +\infty[$.
4. La fonciton g est strictement croissante. Comme $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, le théorème de la bijection assure qu'il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$
Comme $g(1) = -1 < 0$ et que g est strictement croissante, on a de plus $\alpha > 1$
5.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	h	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. On a $f'(e) = e^e g(e) = -e^e(1 - \frac{1}{e}) = -e^e + e^{e-1}$ et $f(e) = e^e$ Donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e et donnée par
$$y - e^e = (-e^e + e^{e-1})(x - e)$$

Exercice 5 (BAC 1997 PONDICHERY)**.** On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1}$$
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A

⋆ étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$g(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0\ ;\ +\infty[$.
On note α cette solution.
(b) Prouver que $1 < \alpha < 2$. (On rappelle que $2 < e < 3$)

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

$\star$ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$**

1. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x + \mathrm{e}^{-x}}$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. (a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

   (b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1.$$

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T).