TD 1 - Fonctions usuelles

Entraînements

Exercice 1. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1.$

Exercice 2. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3.$
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}.$

Exercice 3. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (2x^2 - 4x + 5)e^x - xe^{(x^2)}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1) - x$
3. $f_3 : x \mapsto xe^{-x^2+x}$
4. $f_4 : x \mapsto x^2 e^{(-x^2)}$
5. $f_5 : x \mapsto x\ln(x)$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

Type DS

Exercice 4. 1. Montrer à l'aide d'une étude de fonction que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - x \geq 0$
3. De même en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 2x \geq 0$
4. Etudier la fonction
$$f : x \mapsto \sqrt{e^x - 2x}$$
5. Etudier la fonction
$$g : x \mapsto \sqrt{e^{2x} - x}$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de f.
2. Calculer la dérivée de f en déduire que le signe de f' dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de g et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[\cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de f.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e.

Exercice 6 (BAC 1997 PONDICHERY)**.** On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie A

$\star$ **étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x + 2 - e^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0\ ;\ +\infty[$. On note α cette solution.
   (b) Prouver que $1 < \alpha < 2$. (On rappelle que $2 < e < 3$)
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

$\star$ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$**

1. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que pour tout réel positif x,
   $$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
3. (a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.
   (b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.
   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).
6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T).