

# TD - 10 : Dénombrement

## Entraînements

**Exercice 1.** On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

**Exercice 2.** Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
  - (a) Donner le nombre de résultats possibles.
  - (b) Combien de ces résultats amènent
    - i. exactement 1 jeton noir ?
    - ii. au moins 1 jeton noir ?
    - iii. au plus un jeton noir ?
    - iv. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

**Exercice 3.** Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue 8 fruits différents (une pomme, une banane, ...). Combien y-a-t-il de distributions possibles
  - (a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
  - (b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes golden identiques.

**Exercice 4.** A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 12 touches : 3 lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes
  - (a) pour lesquels les 3 chiffres sont distincts ?
  - (b) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
  - (c) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
  - (d) pour lesquels les 3 chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

**Exercice 5.** Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un coeur ou une dame ?
4. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur ?
5. Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactly 2 couleurs ?
6. Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
7. Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

**Exercice 6.** Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

## Formules démontrées à l'aide du dénombrement

**Exercice 7.** On considère un quadrillage  $\mathbb{N}^2$  du quart de plan des points à coordonnées positives. On appelle chemin croissant tout parcours suivant le quadrillage en utilisant des déplacements vers le haut ou vers la droite.

1. Combien y-a-t-il de chemins croissants de longueur  $n \in \mathbb{N}$  ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  fixé.
  - (a) Combien de chemins croissants permettent de relier  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  ?
  - (b) Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq p \leq m + n$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, p\}$ , dénombrer le nombre de chemins reliant  $A$  et  $B$  et passant par  $C_k \begin{pmatrix} k \\ p - k \end{pmatrix}$ . En déduire la formule de Vandermonde.

**Exercice 8.** Soient  $p, q$  et  $r$  trois entiers naturels tels que  $p + q + r \geq 1$ .

1. Combien de mots de  $p + q + r$  lettres peut-on former en utilisant  $p$  fois la même lettre  $A$ ,  $q$  fois la lettre  $B$  et  $r$  fois la lettre  $C$  ? Vérifier le résultat avec  $p = q = r = 1$ .

2. Démontrer la formule :  $(a + b + c)^n = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p} \binom{n-p}{q} a^p b^q c^{n-p-q}$ .

## Type DS

**Exercice 9.** Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On suppose que les boules sont discernables et on effectue un tirage de 6 boules de cette urne successivement et avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. Combien de ces résultats amènent
  - (a) 5 boules blanches puis une boule noire dans cet ordre ?
  - (b) exactement une boule noire ?
  - (c) au moins une boule noire ?
  - (d) plus de boules noires que de boules blanches ?

**Exercice 10.** Soient  $n, p$  et  $q$  trois entiers naturels. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{2p} \binom{k}{p} 2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mots de  $p + q + 1$  lettres prises dans l'ensemble  $\{A, B\}$ .

1. Calculer  $\text{Card}(\mathcal{M})$ .
2. On note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}$  contenant au moins  $p + 1$  fois la lettre A. Etant donné un entier  $k \in \{1, \dots, q + 1\}$ , on note  $\mathcal{N}_k$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{N}$  dont le  $p + 1$ -ième A se trouve en  $p + k$ -ième position. Déterminer  $\text{Card}(\mathcal{N}_k)$ . En déduire  $\text{Card}(\mathcal{N})$  sous forme d'une somme.
3. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}$  contenant au moins  $q + 1$  fois la lettre B. Déterminer  $\text{Card}(\mathcal{R})$ .
4. En déduire la formule :  $\sum_{k=0}^q \binom{p+k}{p} 2^{q-k} + \sum_{k=0}^p \binom{q+k}{q} 2^{p-k} = 2^{p+q+1}$ .
5. Conclure.