Chapitre 10 : Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.
- Soit E un ensemble fini comportant n éléments. On dit alors que E est de cardinal n et on note $\text{Card}(E) = n$.
- L'ensemble vide est un ensemble fini et son cardinal est $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- Un singleton est un ensemble E vérifiant $\text{Card}(E) = 1$.

⚠ Ne pas confondre le nombre d'éléments et la "dimension" des objets à l'intérieur de l'ensemble.
ex $E = \{(1, 2, 3), (3, 4, 0)\}$ est un ensemble à $\underline{2}$ éléments :

1. $(1, 2, 3)$
2. $(3, 4, 0)$

Chaque élément est une liste contenant 3 nombres. ⚠

Proposition 1. Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$ On a alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Exercice 1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure ?

Proposition 2. Des ensembles finis $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On a alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_i)$$

⚠ Ne pas confondre des ensembles deux à deux disjoints et l'intersection de tous les ensembles est vide.

Proposition 3. Soient A et B deux ensembles finis alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

I. 1 Cardinal d'un complémentaire

Proposition 4. Soit A un sous ensemble d'un ensemble fini E.
On note $\overline{A}$ son complémentaire dans E. Alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Remarque. Penser au complémentaire dès que il y a : "au moins" dans l'énoncé.

Exercice 2. Dans un centre de vacances, il y a 50 personnes plus ou moins sportives et de nombreuses activités leur sont proposées : 15 personnes font du tennis, 20 de la piscine, 30 du volley-ball, 10 du tennis de table, 5 du cheval et 4 restent allongées au bord de la piscine toute la journée. Combien de personnes pratiquent au moins un sport ?

I. 2 Cardinal d'un produit cartésien

Définition 2. Rappels sur le produit cartésien :

- Soient A et B deux ensembles. On note :

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

et on a

$$Card(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$$

- Soit E un ensemble, on note :

$$E^p = \{(e_1, e_2, \dots, e_p) \,|\, e_i \in E\}$$

et on a

$$\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p$$

Exemple 1. Calcul du cardinal de $A \times B$ avec $A = \{2, 6, 8\}$ et $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$:

Exercice 3. On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un roi suivi d'une dame ?
2. On tire maintenant successivement 4 cartes du même jeu. Quel est le nombre M de possibilités d'obtenir dans l'ordre un as, un roi, une dame, et un valet ?

I. 3 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Définition 3. Soit E un ensemble.

- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E On a

$$\mathrm{Card}(P(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Exemple 2. Calculer le nombre de parties des ensembles précédents.

I. 4 Cardinal et applications

Proposition 5. Soient E et F deux ensembles finis.

— Il existe une injection entre E et F ssi $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$

— Il existe une surjection entre E et F ssi $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$

— Il existe une bijection entre E et F ssi $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

II Choix de p objets parmi n

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E. Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de tirer p éléments parmi n :

- Avec ordre et répétition (n^p) (Nombre de codes secrets de carte bleue)
- Avec ordre et sans répétition, ($\frac{n!}{(n-p)!}$) (Nombre de possiblités au tiercé)
- Sans ordre et sans répétition, ($\binom{n}{p}$) (nombre de possibilités au loto)
- Sans ordre et avec répétition. (plus rare et compliqué)

II. 1 Choix successifs

II. 1. a Listes avec répétitions éventuelles (avec ordre et répétition)

Définition 4. Soit E un ensemble de cardinal fini n.

Une p-liste de E est un élément de E^p

Exemple 3. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner une 2-liste de E : .... et une 5-liste de E : ....

Remarque. Ne pas confondre p-liste avec ensemble à p éléments. Dans une p-liste, l'ordre est important et si on change l'ordre, on change la p-liste. Dans un ensemble à p éléments, l'ordre n'intervient pas et l'ensemble est toujours le même lorsque l'on intervertit des éléments.
Exemple avec les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(3, 2)$:

Proposition 6. Avec ordre et répétition :
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts avec répétition possible et avec ordre est n^p c'est-à-dire Card(E^p)

Exemples.

- **Exemple fondamental : Tirage successif avec remise**
  Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p. On tire successivement p boules dans l'urne, on note le numéro de la boule tirée à chaque fois et l'on remet la boule dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....
- Nombre de façons de ranger 2 chemises de couleurs différentes dans 3 tiroirs discernables : ....
- Nombre de mots de 5 lettres écrits avec les lettres A,B,C,D,E et F : ....
- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec 0, 1 ou plusieurs billes par boîte : ....

II. 1. b Listes sans répétition (avec ordre et sans répétition)

Définition 5. Soit E un ensemble de cardinal fini n.
Une p-liste de E sans répétition (ou arrangement de p éléments de E) est

Exemple 4. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner une 5-liste sans répétition de E : ....

Remarque. Pour qu'il n'y ait pas de répétition, il faut nécessairement que l'on ait ....

Proposition 7. Avec ordre et sans répétition :
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et avec ordre est ....
c'est-à-dire :

Remarque. On utilise parfois la notation $\mathcal{A}_n^p$ (pour "arrangement") pour désigner le nombre de p-listes sans répétition d'un ensemble à n éléments. Ainsi, on a $\mathcal{A}_n^p =$ ....
Par convention, on pose $\mathcal{A}_n^0 = 1$ et $\mathcal{A}_n^p = 0$ si $p > n$.

Exemples.

- **Exemple fondamental : Tirage successif sans remise**
  Soient une urne contexnant n boules différentes et un entier p. On tire successivement et sans remise p boules dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....
- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte : ....
- Nombre de paris possibles au tiercé dans une course où 15 chevaux sont en compétition : ......
- Nombre de mots de 3 lettres distinctes avec les lettres A,B,C et D : ....

Définition 6. Soit E un ensemble fini à n éléments.
On appelle permutation de E ....

Exemple 5. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner un exemple de permutation de E : ....
Doner un exemple de 7-liste de E qui n'est pas une permutation : ....

Proposition 8. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est ....

Exercice 4. Nombre de permutations de $[\![1, 3]\!]$? de $[\![1, 6]\!]$? ....

II. 2 Choix simultanés

II. 2. a Combinaisons (sans ordre et sans répétition)

Définition 7. Soient E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E ....
....

Exemple 6. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner une combinaison à 5 éléments de E : ....

Remarque. On doit nécessairement avoir ....

Proposition 9. Sans ordre et sans répétition :
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et sans ordre est ....
c'est-à-dire :

Exemples.

- **Exemple fondamental : Tirage simultané non ordonné**
  Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p. On tire simultanément p boules. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....
- Nombre de répartitions possibles de 5 billes identiques dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte : ....

Exercice 5. Jeu de cartes : on distribue 5 cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur, celui-ci dispose donc d'une main de 5 cartes.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.
2. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 coeurs.
3. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 cartes de pique, 2 cartes de coeur et 1 carte de carreau.

Exercice 6. Formule des "chefs" : un sélectionneur de foot doit choisir k joueurs parmi n candidats, et désigner un capitaine parmi les joueurs. En comptant de deux façons différentes le nombre de possibilités, redémontrer la formule des "chefs".

II. 2. b Choix sans ordre et avec répétition

Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. On verra quelques exemples en TD.

Exemple 7. On considère 5 boules indiscernables que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles.