## Table des matières



# Chapitre 11 : Matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

## I Généralités : notations, définitions

### *I. 1 Définitions*

Matrices, ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ :

**Définition 1.** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

- On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de nombres appartenant à $\mathbb{K}$, sur $n$ lignes et $p$ colonnes.
- Si $A$ est une telle matrice, on note $a_{ij} \in \mathbb{K}$ le coefficient de la $i$-ème ligne et $j$-ième colonne. Ainsi, dans le cas général, on a :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & x_{d2} & a_{d3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

**remarque** Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n', j=1\dots p'}$

On dit que les deux matrices $A$ et $B$ sont égales si et seulement si

- $n = n'$ , $p = p'$

- $a_{ij} = b_{ij}$

**Exemples.** • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. On a alors

- $B = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1+3i \\ 3 & -4+7i & -5i \\ 8-i & -i & 6+i \\ 2+6i & -9+i & 1+4i \end{pmatrix}$. On a alors

**Exercice 1.** Donner des matrices $A$, $B$ et $C$ telles que $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$.

Matrices carrées, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :

**Définition 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée
- L'ensemble des matrices carrées de taille $n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Exemples.** • Exemple d'une matrice carrée réelle de taille 2 :
- Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

**Exemples.**

## *I. 2 Matrices particulières*

**Définition 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Si $A$ est une matrice à $n$ lignes et 1 colonne, on dit que $A$ est est une matricce colonne
- Si $A$ est une matrice à 1 ligne et $n$ colonnes, on dit que $A$ est une matrice ligne.

Matrices diagonales :

**Définition 4.** Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est diagonale si $\forall i, j, i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Exemples.**

**Définition 5.** Matrices triangulaires :

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire supérieure si $\forall i, j, i \geq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$ $A$ est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire inférieure si$\forall i, j, i \leq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$ $A$ est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Définition 6.** Soient $(n, p)$ deux entiers naturels non nuls.

- La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée la matrice nulle.
- La matrice diagonalle avec que des 1 sur la diagonale est appelée la matrice identité de taille $n$. Elle est notée $\mathrm{Id}_n$

**Exemples.**

$0_{23} =$ $\qquad$ $I_2 =$ $\qquad$ $I_3 =$ $\qquad$ $0_{14} =$

**Définition 7.** Soient les entiers naturels non nuls $(n, p)$ fixés.

- Pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_(\mathbb{K})$ la matrice ................

  ..........................................................................
- Les matrices $E_{ij}$ sont appelées les ........................................

**Exemples.** On se place ici dans $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$. Donner toutes les matrices élémentaires.

## *I. 3 Transposée d'une matrice*

**Définition 8.** Transposée d'une matrice :

Soit $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de $A$ et on note $A^t$, la matrice $B = (a_{j,i})_{j=1\dots p, i=1\dots n} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ alors

La transposée d'une matrice s'obtient donc par symétrie par rapport à la diagonale.

**Exemples.**

- Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

- Calculer la transposée de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

**Définition 9.** Matrices symétriques et anti-symétriques :
- Une matrice est dite symétrique si $A = A^t$
- Une matrice est dite anti-symétrique si $A = -A^t$

**Exemples.**
- Donner deux exemples de matrices symétriques : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$
- Donner deux exemples de matrices anti-symétriques : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
- Donner un type de matrice toujours symétrique : matrices diagonales.

**Remarques.**
- Les matrices symétriques sont forcément carrées
- Propriétés des matrices anti-symétriques :
  - ⋆ Les matrices anti-symétriques sont forcément carrées.
  - ⋆ Il n'y a que des 0 sur la diagonale.

# II Opérations élémentaires dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

## *II. 1 Somme de deux matrices de même taille*

Définition de la somme de deux matrices :

**Définition 10.** Sommes de matrices :
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $A+B$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $A+B =$

**Exemple 1.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

⚠ On ne somme que des matrices de même taille (meme nombre de colonnes, meme nombre de lignes)

❶ **Associativité :** $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$,

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

❷ **Commutativité :** $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$A+B = B+A$$

❸ **Somme et transposée :** $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

## *II. 2 Multiplication par un scalaire*

**Définition 11.** Multiplication par un scalaire :
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $\lambda A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\lambda A =$

**Exemples.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $5A$ et $-2A+3B$.

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -2A+3B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

❶ **Associativité :** $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

❷ **Distributivité :** $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\begin{cases} \lambda(A+B) & = \lambda A + \lambda B \\ (\lambda+\mu)A & = \lambda A + \mu A \end{cases}$

❸ **Multiplication par 0 :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$0A = 0_n$$

❹ **Multiplication et transposée :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

# III Produit matriciel

## III. 1 Produit matriciel : définition

**Exemples.** • On définit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons $AB$.

- On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $AB$ puis $BA$.
- On définit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Calculons $AB$.

**Définition 12.** Soient $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$ trois entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots p, j=1\dots q}$.
Le produit $AB$ de la matrice $A$ par la matrice $B$ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!]\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

⚠Le produit matriciel $A \times B$ n'est défini que si le nombre de collones de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$.

**Exercice 2.** Calculer tous les produits de deux matrices possibles avec les quatre matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$

**Remarques.** • Le produit matriciel $AB$ peut exister sans que $BA$ existe.

- ⚠Même si $AB$ et $BA$ existent, ils ne sont généralement pas égaux.

**Exemple 2. Multiplication matrice-vecteur et lien avec les sytèmes linéaires**. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer $AX$. Mettre sous forme matricielle le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$

Le système correspond à l'équation matricielle

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## III. 2 Propriétés

**Proposition 1.** Soient $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^4$ des entiers naturels non nuls. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
Pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})^2$, tout couple de matrices $(C, D) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})^2$ et toute matrice $E \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{R})$, on a :

- **Distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition :**

$$(A+B)C = AC + BC$$

L'ordre est important ce n'est pas $CA + CB$.

- **Distributivité du produit matriciel par rapport à la multiplication par un scalaire :**

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Associativité du produit matriciel :**

$$(AC)E = A(CE)$$

- **Elément neutre et produit matriciel :**

$$A\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}\,A = A$$

- **Produit matriciel et transposition :**

$$(AB)^T = B^T A^T$$

⚠ l'ordre est important !

⚠ Les propriétés habituelles du produit sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ ne s'appliquent pas du tout au produit matriciel. Donnons quelques exemples :

**Remarques.**

- Deux matrices NON NULLES peuvent avoir un produit NUL. Calculer $AB$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ :

- La règle de simplification par un facteur non nul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne s'applique pas du tout aux matrices. On peut très bien avoir $AB = AC$ ................................................
Calculer $AB$ et $AC$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ :

- Le produit matriciel ..........................................................................
Calculer $AB$ et $BA$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- Les identités remarquables et le binôme de Newton sont en général faux avec des matrices car on utilise pour les démontrer la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$.

$(A+B)^2 =$ $\qquad\qquad$ $(A-B)(A+B) =$ $\qquad\qquad$ $(A+B)^3 =$

- Les propriétés usuelles dans $\mathbb{R}$ avec les puissances sont aussi en générale fausses avec les matrices toujours à cause de la non commutativité du produit matriciel.
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$(AB)^3 = ABABAB \neq A^3 B^3$$

## *III. 3 Puissances n-ièmes de matrices carrées*

On se place dans toute cette section dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées de taille $r$, $r \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi tous les produits matriciels ont bien un sens.

**Définition 13.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A$ une matrice carrée non nulle de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On définit $A^n$ matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ pour tout entier naturel $n$ par la récurrence suivante

$$\begin{cases} A^0 = \mathrm{Id} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A^n A \end{cases}$$

**Proposition 2.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ une matrice carrée diagonale. On a :

$$A^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n)$$

⚠ Ca ne marche UNIQUEMENT pour les matrices diagonales.

**Exercice 3.** Calculer les puissances $n$-ièmes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**Proposition 3.** Soient $A$ et $B$ deux matrices qui commutent $AB = BA$, on a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ (AB)^n = A^n B^n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

**Méthode pour calculer $A^n$ quand on connaît une relation entre les petites puissances de $A$ :**

- On calcule une relation entre par exemple $A^2$, $A$ et $I_r$ (ou entre $A^3$, $A^2$, $A$ et $I_r$...).
- On démontre par récurrence l'existence d'une ou plusieurs suites permettant d'exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n$ en fonction de $A$ et de $I_r$.
- La récurrence nous donne alors la relation de récurrence vérifiée par ces suites.
- De cette relation, on en déduit l'expression explicite des suites.
- On en déduit l'expression de $A^n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4.** On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Donner l'expression explicite de ces deux suites et en déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 : Par diagonalisation ou trigonalisation (voir en TD)

## IV Matrices et systèmes linéaires

**Proposition 4.** Écriture matricielle d'un système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ est appelée la matrice associée au système

**Exemple 3.** L'écriture matricielle du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ 6x & + & 8y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$ est

**Définition 14.** Rang d'une matrice :

On appelle rang d'une matrice $A$, noté $rg(A)$, le rang du système $AX = 0$

Pour calculer le rang du système on doit le mettre sous forme échelonné.

**Méthode pour calculer le rang d'une matrice :**

On utilise directement sur la matrice la méthode du pivot de Gauss (sans revenir au système associé).

**Exercice 5.** Donner le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

**Exercice 6.** Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & \alpha \\ 3x & + & 4y & = & \beta \end{array}\right.$ et en déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse d'une matrice $A$ revient donc à résoudre le système linéaire $AX = Y$ pour arriver à $X = A^{-1}Y$, et ainsi identifier les coefficients de $A^{-1}$. En pratique, on utilise la méthode du pivot de Gauss directement sur les matrices, en remarquant que l'on peut réécrire notre résolution du système sous la forme :

$$AX = I_nY \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}Y.$$

Ainsi, si l'on arrive à passer de la matrice $A$ à la matrice $I_n$ grâce à la méthode du pivot de Gauss, les mêmes opérations permettront de passer de la matrice $I_n$ à la matrice $A^{-1}$.

- On part de la matrice $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On effectue les opérations élémentaires classiques sur les LIGNES.

BUT Transformer la partie gauche de la grosse matrice, à savoir $A$, en $I_n$.

- ⋆ Toujours possible si $A$ est inversible et on connaît $A^{-1}$ car : $(A|I_n) \underset{\text{opérations}}{\longrightarrow} \left(I_n|A^{-1}\right)$.
- ⋆ Impossible si $\mathrm{rg}(A) < n$, et dans ce cas la matrice $A$ n'est pas inversible.

**Exercice 7.** Reprendre les matrices de l'exercice précédent, et calculer l'inverse des matrices inversibles.

**Exercice 8.** Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer son inverse si elle est inversible.

# V Matrices carrées inversibles

Une matrice NON carrée ne peut pas être inversible. On se place donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

## *V. 1 Définition et propriétés*

**Définition 15.** Définition d'une matrice inversible :

- Soit $A$ matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les conditions suivantes sont équivalentes :
  1. Le rang de $A$ vaut $n$
  2. L'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une unique solution : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
  3. Il existe une matrice $B$ telle que $AB = BA = \mathrm{Id}$

  On dit dans ce que la matrice $A$ est inversible et la matrice $B$ est alors notée $A^{-1}$ s'appelle l'inverse de $A$

**Exemples.**
- Étude de l'inversibilité de $I_n$ : est inversible d'inverse $I_n$.
- Étude de l'inversibilité de $0_n$ :n'est pas inversible $rg(0_n) = 0$
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $-A$ est son inverse.

**Remarques.**
- Si $A$ est inversible et que l'on a : $AB = AC$ alors $B = C$
- Si $A$ est inversible et que l'on a : $AB = 0_n$ alors $B = 0$

**Proposition 5.** Soient $A$ et $B$ deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$. Alors :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

## *V. 2 Cas Particulier*

**Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires supérieures**

**Proposition 6.** Inversibilité des matrices diagonales et inverse :

- Une matrice diagonale $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous les $\lambda_i$ sont non nuls. ($\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0$)
- Son inverse est alors donné par :

$$A = \mathrm{Diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots \frac{1}{\lambda_n})$$

**Exemples.** Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Proposition 7.** Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les éléments diagonaux sont non nuls.

⚠ Il n'y a pas de formule générale pour l'inverse. ⚠

**Exemples.** Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

**Inversibilité des matrices dont on connaît une relation entre les petites puissances** Lorsque l'on connaît une relation entre une matrice $A$ et ses petites puissances ($A^2$, $A^3$...), on sait facilement si la matrice est inversible ou pas et dans le cas où elle est inversible, on connaît tout de suite l'inverse.

**Méthode pour étudier l'inversibilité quand on connaît une relation entre les petites puissances :**

- Cas d'inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances de la matrice $A$, la matrice $I_r$ est présente, alors $A$ est inversible.
  - ⋆ Pour trouver $A^{-1}$, on met $A$ en facteur et on écrit : $AC = I_r$ alors $A^{-1} = C$ par définition de l'inversibilité.
- Cas de non inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances, la matrice $I_r$ n'est pas présente, alors $A$ n'est pas inversible.
  - ⋆ Pour le montrer, on utilise un raisonnement par l'absurde.

**Exercice 9.**
- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = -M + 2I_3$. En déduire que $M$ est inversible et calculer son inverse.
- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3A$ puis que la matrice $A$ n'est pas inversible.

## *V. 3 Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.*

**Définition 16.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le déterminant de $A$ est défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

**Exercice 10.** Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

**Proposition 8.** Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Son inverse est alors donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 11.** Étudier l'inversibilité des matrices $A$ et $B$ de l'exercice précédent, et calculer leur inverse si elle existe.

**Exercice 12.** Résoudre le système $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

## *V. 4 Lien avec les systèmes linéaires*

**Proposition 9.** Soient $\mathcal{S}$ un système de $n$ équations à $n$ inconnues et $A$ la matrice qui lui est associée.

- Le système est de Cramer si et seulement si $rg(A) = n$
- De plus, dans ce cas, l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ est

$$X = A^{-1}Y$$