Correction TD 12 : continuite

Entrainements

Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 1. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Correction 1.

1. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   - Régularité : La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
2. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$
   - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $1+x>0$ et $|x|>0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
   - Régularité : La fonction g est continue sur $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme, composées et produit de fonctions continues.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2+4x}{1+x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

Correction 2.

1. **Étude de la continuité de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \textbf{si } x>0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$:**
   - Domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
   - Continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions continues.
   - Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$ et $f(0)=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ et donc la fonction f n'est pas continue en 0.

   Conclusion : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ mais elle n'est pas continue en 0.
2. **Étude de la continuité de la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \textbf{si } x<0 \\ 1 & \textbf{si } x=0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & \textbf{si } x>0 \end{cases}$:**

- Domaine de définition : si $x < 0$, on a bien toujours $1 - 4x > 0$ et $2x \neq 0$. De même, si $x > 0$, on a bien toujours $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
- Continuité sur $\mathbb{R}^\star$: La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme somme, composée et quotient de fonctions continues. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$.
- Continuité en 0 :
  - ⋆ Par substitution, on a : $\ln(1 - 4x) \underset{0}{\sim} -4x$ et par quotient d'équivalents : $\dfrac{\ln(1-4x)}{2x} \underset{0}{\sim} -2$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -2$. Comme $g(0) = 1 \neq -2$, la fonction g n'est pas continue à gauche en 0 et ainsi elle n'est pas continue en 0.
  - ⋆ D'après les équivalents usuels et par quotient d'équivalents, on a : $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$. Donc la fonction g est continue à droite en 0.

Conclusion : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et à droite en 0 mais elle n'est pas continue en 0.

3. **Étude de la continuité de la fonction h définie par** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 + 4x}{1 + x} & \textbf{si } x < 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$ **:**

- Domaine de définition : Pour tout $x > 0$, on a bien que $x \neq 0$. Par contre, sur $\mathbb{R}^{-\star}$, la fonction h est bien définie si $1 + x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$: La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{-\star} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales et elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues. Ainsi la fonction h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- Continuité en 0 :
  - ⋆ $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$ par propriétés sur les sommes et quotient de limites. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, la fonction h n'est pas continue à gauche en 0 et donc elle n'est pas continue en 0.
  - ⋆ Pour tout $x > 0$, on a : $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$ car $x > 0$. De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} -x = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$. Comme $h(0) = 1 \neq 0$, la fonction h n'est pas non plus continue à droite en 0.

Conclusion : La fonction h est continue sur $\mathcal{D}_h \setminus \{0\}$ mais elle n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Correction 3.

1. Étude de la fonction f :
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la continuité de f :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues.
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]$ comme fonction polynomiale. En particulier elle est donc continue à gauche en 0 et on a : $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.
     - ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a déjà que :

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Étude de la limite à droite en 0 : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par propriétés sur les quotient et composée de limites. Ainsi on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ donc la fonction f est bien continue en 0.

La fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Étude de la fonction g :
   - La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. En effet pour $x \neq 0$, la fonction g est bien définie si et seulement si : $e^{x^2} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ce qui est bien le cas.
   - Étude de la continuité de g :
     - ⋆ La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction g est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a par définition que : $g(0) = 2$. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $g(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{e^{x^2} - 1}$. Avec les équivalents usuels en 0, on a : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ puis par produit d'équivalents : $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. De plus par substitution : $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents : $g(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Comme $1 \neq g(0)$, la fonction g n'est pas continue en 0.

   La fonction g est ainsi continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Exercice 4. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a, b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 4. La fonction h est définie par : $h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$ Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, elle est continue sur $]-1, 1[$ comme somme et composée de fonctions continues et elle est continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comme fonction polynomiale. Comme cette fonction est définie par deux raccords, on doit étudier la continuité en -1 et en 1 en repassant par la définition, à savoir avec les limites.

- Étude en -1 : La fonction h est continue à gauche en -1 avec $f(-1) = a - b + c = \lim_{x\to -1^-} f(x)$. De plus : $\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en -1, on doit avoir : $a - b + c = 0$.
- Étude en 1 : La fonction h est continue à droite en 1 avec $f(1) = a + b + c = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. De plus : $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en 1, on doit avoir : $a + b + c = 0$.

Ainsi, on doit prendre a, b et c tels que : $\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0. \end{cases}$ La résolution de ce système linéaire donne : $\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ 2b &= 0. \end{cases}$ Ainsi, si on prend par exemple : $b = 0$, $a = 1$ et $c = -1$, ces trois réels permettent que la fonction h soit bien continue en -1 et en 1. Et ainsi elle sera bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$.

2. En déduire que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On distingue deux cas :
   - Cas 1 : si $f(x) > g(x)$:
     On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = f(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ car $f(x) - g(x) > 0$. Et ainsi, on a : $\dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \dfrac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = f(x)$.
     Donc dans ce cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = f(x)$.
   - Cas 1 : si $f(x) \leq g(x)$:
     On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = g(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ car $f(x) - g(x) \leq 0$. Et ainsi, on a : $\dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \dfrac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = g(x)$. Donc dans ce cas aussi, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = g(x)$.

   Ainsi dans tous les cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$.
2. Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et que par hypothèse les fonctions f et g sont bien continues sur $\mathbb{R}$, on a que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

Partie Entière

Exercice 6. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

Correction 6.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E =]\tfrac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5} - 1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\tfrac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

   On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2} - 1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

   On a $f(1) = \lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5 - 1} \rfloor = \lfloor 2 - 2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \lfloor 2\times 12 - \sqrt{60-1}\rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59}\rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \lfloor 2x - \sqrt{5x-1}\rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1}\rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad\quad\;\; (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x - 1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- <u>Cas 1 :</u> $2x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x - 1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x - 1 > 4x^2 - 4x + 1 \\ &\iff 4x^2 - 9x + 2 < 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4*4*2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$. $4x^2 - 9x + 2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{ et } \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap [\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- <u>Cas 2 :</u> $2x - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- Cas 1 : $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x-1 \leq (2x)^2\\ &\iff 5x-1 \leq 4x^2\\ &\iff 4x^2-5x+1 \geq 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4*4*1 = 25-16 = 9 = 3^2$. $4x^2-5x+1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0,+\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[) \cap [0,+\infty[\cap D_E\\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0,+\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

- Cas 2 : $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$

Exercice 7. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor .$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Correction 7. Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $k = \lfloor x \rfloor$. On a donc $x \in [k, k+1[$. Il y a maintenant deux cas possibles

Cas 1 : $y \in [k, k+1[$ alors $\lfloor y \rfloor = k$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Cas 3 : $y \notin [k, k+1[$ Comme $y \geq x$, on a $y > k+1$ et comme $\lfloor y \rfloor > y-1$ on a $\lfloor y \rfloor > k = \lfloor x \rfloor$
On a ainsi montré que la fonction était croissante.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

Correction 8. ## Correction de l'exercice

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Partie 1 : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Décomposition de x : On écrit $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x et $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x, avec $0 \leq \{x\} < 1$.

2. Analyse de $\lfloor nx \rfloor$: On a :

$$nx = n\lfloor x \rfloor + n\{x\}.$$

Ainsi :

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor.$$

Comme $n\lfloor x \rfloor$ est un entier, on obtient :

$$\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor.$$

3. Expression de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$: En divisant par n, on trouve :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\{x\} \rfloor}{n}.$$

Or $0 \leq n\{x\} < n$, donc $0 \leq \frac{\lfloor n\{x\} \rfloor}{n} < 1$.

4. Application de la partie entière : En appliquant la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$, on a :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\{x\} \rfloor}{n} \right\rfloor.$$

Comme $0 \leq \frac{\lfloor n\{x\} \rfloor}{n} < 1$, il en résulte :

$$\left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\{x\} \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Ainsi, on a montré que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Partie 2 : $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Décomposition de x : On écrit $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x et $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x, avec $0 \leq \{x\} < 1$.

2. Analyse de $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor$: Pour tout k, on a :

$$x+\frac{k}{n}=\lfloor x\rfloor+\{x\}+\frac{k}{n}.$$

Donc :

$$\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\left\lfloor \lfloor x\rfloor+\{x\}+\frac{k}{n}\right\rfloor.$$

- Si $\{x\}+\frac{k}{n}<1$, alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$. - Si $\{x\}+\frac{k}{n}\geq 1$, alors $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$.

3. Analyse de la somme : La somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor$$

est constituée de termes égaux à $\lfloor x\rfloor$ et de termes égaux à $\lfloor x\rfloor+1$. Le nombre de termes égaux à $\lfloor x\rfloor+1$ est donné par le nombre m de valeurs de k telles que $\{x\}+\frac{k}{n}\geq 1$. Cela équivaut à :

$$k\geq\lceil n(1-\{x\})\rceil.$$

Ainsi, la somme s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=n\lfloor x\rfloor+m,$$

où m est exactement égal à :

$$m=\lfloor nx\rfloor-n\lfloor x\rfloor.$$

4. Conclusion : On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=n\lfloor x\rfloor+(\lfloor nx\rfloor-n\lfloor x\rfloor)=\lfloor nx\rfloor.$$

Exercice 9. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor.$$

Correction 9. Distinguons les cas selon la parité de $\lfloor x\rfloor$.

Cas 1 : $\lfloor x\rfloor$ est paire Dans ce cas, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\lfloor x\rfloor\in[2k,2k+1[$, où $\lfloor x\rfloor=2k$. On a alors $\frac{x}{2}\in[k,k+\frac{1}{2}[$ donc $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=k$ et $\frac{x+1}{2}\in[k+\frac{1}{2},k+1[$, donc de nouveau $\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=k$

On a bien l'égalité demandée.

Cas 2 : $\lfloor x\rfloor$ est impaire Dans ce cas, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\lfloor x\rfloor\in[2k+1,2k+2[$, où $\lfloor x\rfloor=2k+1$. On a alors $\frac{x}{2}\in[k+\frac{1}{2},k+1[$ donc $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=k$ et $\frac{x+1}{2}\in[k+1,k+\frac{3}{2}$, donc cette fois $\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=k+1$

On a bien l'égalité demandée.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par : $f:\ x\mapsto\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Déterminer la limite de f en n à gauche et à droite.
3. En déduire l'ensemble de continuité de f.

Correction 10. 1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x-\lfloor x\rfloor\geq 0$. Or par caractérisation de la partie entière, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$. Ainsi $x-\lfloor x\rfloor\geq 0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé.
   - $\star$ On a : $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$.
   - $\star$ $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$ car $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.
   - $\star$ $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n$ car $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$.

   Ainsi, on a : $f(n) = \lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} f(x)$. Ainsi la fonction f est continue sur tous les entiers.
3. Comme la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme somme et composée de fonctions continues. De plus, on vient de montrer que f est aussi continue sur $\mathbb{Z}$. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Existence d'un éventuel prolongement par continuité

Exercice 11. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = \dfrac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}$.
3. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1)$.
4. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$
8. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|}$
9. $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$
10. $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$
13. $f(x) = x^x$

Correction 11.

1. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     - $\star$ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
     - $\star$ Étude de la limite en 0 : comme la fonction cosinus n'admet pas de limite en l'infini, la fonction f n'admet pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1 + x > 0$ et $e^{2x^2} - 1 \neq 0$, à savoir si et seulement si : $x > -1$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - $\star$ La fonction f est continue sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues.
     - $\star$ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :
       Par les équivalents usuels : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $e^{2x^2} - 1 \underset{0}{\sim} 2x^2$ par substitution et par produit et quotient d'équivalents : $f_2(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{|x|}{2x}$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Les deux limites ne sont

pas égales et ainsi il n'existe pas de limite en 0. Donc la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0. Par contre elle est prolongeable par continuité à droite en 0 en posant : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Et elle est aussi prolongeable par continuité à gauche en 0 en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en -1 : on a : $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x) = -\infty$ par propriété sur les composée, somme, produit et quotient de limites. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

3. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$:**

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$, $\sqrt{x} - 1 > 0$ et $x - 1 > 0$, à savoir $x > 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et somme de fonctions continues.
  - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on a : $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\ln 2$ par propriétés sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fonction f est bien prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\ln 2$.

On obtient une fonction que l'on continue de noter f et qui est alors définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si } x > 1 \\ -\ln(2) & \text{si } x = 1. \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[1, +\infty[$ car elle est continue sur $]1, +\infty[$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

4. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$:**

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^2 - 1 \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme somme, produit et quotient de fonctions continues
  - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 : par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Et ainsi par somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
  - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on pose $X = x - 1$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{1+X}{2+X} \times \dfrac{\ln(1+X)}{X}$. Par les équivalents usuels en 0, on a : $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \underset{0}{\sim} 1$. Et ainsi par propriétés sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x>0,\ x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=1. \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 0 et en 1 par prolongement.

5. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1-x\neq 0$ et $1-x^2\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer que $f(x) = \dfrac{-1}{1+x}$ en mettant tout sur le même d/'enominateur et en utilisant le fait que $1-x^2 = (1-x)(1+x)$. Ainsi par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
     - ⋆ Étude de la limite en 1 : Comme $f(x) = \dfrac{-1}{1+x}$, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} & \text{si } x\neq 1,\ x\neq -1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x=1 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

6. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1+x>0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer en factorisant le numérateur et en simplifiant avec le dénominateur que $f(x) = \sqrt{1+x}\times(x-3)$. Ainsi par propriété sur les sommes et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}} & \text{si } x>-1, \\ 0 & \text{si } x=-1 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1,+\infty[$ car elle est continue sur $]-1,+\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 par prolongement.

7. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$ et $1+x \geq 0$ Par un passage au carré, on obtient que $\sqrt{1+x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : en utilisant les deux équivalents usuels et en les quotientant, on obtient que : $f(x)0\underset{\sim\frac{x}{2}}{\frac{x}{}}$. Ainsi $f(x) \underset{0}{\sim} 2$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1, +\infty[$ car elle est continue sur $[-1, +\infty[\setminus\{0, \}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

8. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{|x|}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : par l'équivalent usuel du cosinus et par substitution, on a : $1-\cos\left(\sqrt{x}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}$. Ainsi par quotient $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ car $|x| = x$ car on est sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{|x|} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

9. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$. On fait alors un tableau de signe. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : on a : $f(x) = x\ln|x^2-1| - x\ln|x|$. Par croissance comparée, on obtient donc que : $\lim_{x\to 0^-} x\ln|x| = 0$. Et ainsi par propriété sur les sommes, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

* ⋆ Étude de la limite en 1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) & \text{si } x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ car elle est continue sur $]-1,0[\cup]1,+\infty[$ comme somme, quotient,composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

10. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     * ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues.
     * ⋆ Étude de la limite en 0 : On utilise le théorème des gendarmes : On a : $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x^2$ car $x^2 > 0$. De plus $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

11. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2x-1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
   - Étude de la continuité :
     * ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme sommes et quotient de fonctions continues
     * ⋆ Étude de la limite en $\dfrac{1}{2}$: en factorisant le numérateur, on obtient que : $f(x) = \dfrac{(2x-1)(3x+4)}{2x-1} = 3x+4$. Ainsi par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{11}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$ en posant $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{11}{2} & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en $\dfrac{1}{2}$ par prolongement.

12. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$:**
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x \neq 0$ et $1 + x^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai comme somme de deux termes positifs. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{\star}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues
  - ⋆ Étude de la limite en 0 : En utilisant une substitution, on obtient que : $\sqrt{1+x^2}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Puis par quotient d'équivalents, on obtient que $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{\star}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

13. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$:**
    - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composée de fonctions continues.
      - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues
      - ⋆ Étude de la limite en 0 : Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$. Ainsi par propriété sur la composition de limites, on obtient que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

    On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composées de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

Exercice 12. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f.

Correction 12. ?

Exercice 13. Peut-on prolonger par continuité en les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $g(x) = x^x$

Correction 13.

1. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$:**
    - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x \neq 0$ et $1 + x^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai comme somme de deux termes positifs. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{\star}$.
    - Étude de la continuité :
      - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{\star}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues
      - ⋆ Étude de la limite en 0 : En utilisant une substitution, on obtient que : $\sqrt{1+x^2}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Puis par quotient d'équivalents, on obtient que $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

2. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction g définie par $g(x) = x^x = e^{x \ln x}$:**
   - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $x > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Étude de la continuité : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composée de fonctions continues.
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. Ainsi par propriété sur la composition de limites, on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. Ainsi la fonction g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter g qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par
   $g(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composées de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$.
L'application f admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

Correction 14.

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- Limites aux bornes :
  - ⋆ Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x^n}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$. Ainsi par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$. On pourrait étudier la position relative.
  - ⋆ Limite en $-\infty$: tout dépend de la parité de n. Si n est pair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et si n est impair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. On pourrait faire l'étude des branches infinies.
  - ⋆ Limite en 0 : Par les équivalents usuels, on a : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et ainsi on a : $f(x) \underset{0}{\sim} x^{n-1}$. Ainsi, on doit distinguer deux cas selon que $n = 1$ ou $n > 1$:
    - ∘ Si $n = 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
    - ∘ Si $n \geq 2$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues. De plus elle est continue en 0 par prolongement par continuité. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1}$. Quel est son ensemble de définition ? La fonction f_n admet-elle un prolongement par continuité définie sur $\mathbb{R}$?

Correction 15.

- Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x^{2n}-1 \neq 0$, à savoir sur $\mathbb{R}$, on doit donc avoir $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Étude des limites en -1 et en 1. **Méthode 1 :** on pose le changement de variable $X = x^2$. On a ainsi, lorsque x tend vers 1 ou -1, X qui tend vers 1. On doit donc étudier la limite de $\dfrac{e^X-e}{X^x-1}$ en 1. On pose alors $Y = X-1$ pour se ramener à 0. On a :
$$\frac{e^X-e}{X^x-1} = \frac{e^{Y+1}-e}{(1+Y)^n-1} = \frac{e(e^Y-1)}{(1+Y)^n-1} \underset{Y\to 0}{\sim} \frac{eY}{nY} = \frac{e}{n}.$$
Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{e}{n}$. On peut donc prolonger f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1} & \text{si } x \notin \{-1,1\}, \\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{cases}$

  Méthode 2 :

  ⋆ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-e}{x+1} \times \dfrac{x+1}{x^{2n}-1}$. La fonction $g : x \mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(1) = 2e$. La fonction $h : x \mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1) = 2n$ car $h'(x) = 2nx^{2n-1}$ et $2n-1 \geq 1$ car $n \geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{g'(1)}{h'(1)} = \dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{e}{n}$.

  ⋆ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-e}{x-1} \times \dfrac{x-1}{x^{2n}-1}$. La fonction $g : x \mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(-1) = -2e$. La fonction $h : x \mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1) = -2n$ car $h'(x) = 2nx^{2n-1}$ et $2n-1 \geq 1$ car $n \geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{g'(-1)}{h'(-1)} = \dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = \dfrac{e}{n}$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1} & \text{si } x \notin \{-1,1\}, \\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x = 1 \text{ ou } \ x = -1. \end{cases}$

- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ comme composées, sommes et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 et en 1 par prolongement par continuité.

Exercice 16. Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Correction 16. On va montrer que pour $a > -1$, la fonction f est bien prolongeable par continuité en 0.

- La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme quotient, composée et produits de fonctions continues.
- Vérifions que si $a > -1$, alors la fonction f est prolongeable par continuité en 0 :
  - ⋆ En utilisant l'équivalent usuel en 0 : $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et par produit d'équivalents, on sait que : $f(x) \underset{0}{\sim} |x|^a x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi il suffit de calculer la limite de la fonction $g : x \mapsto |x|^a x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
  - ⋆ Comme il y a le terme $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on utilise soit le théorème des gendarmes, soit le corollaire du théorème des gendarmes. Ici on va utiliser le corollaire. On a : $|g(x)| \leq |x|^a \times |x| \Leftrightarrow |g(x)| \leq |x|^{a+1}$. Ainsi, on a :
    - ∘ Comme $a + 1 > 0$ car par hypothèse $a > -1$, on a : $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{a+1} = 0$.
    - ∘ $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ |g(x)| \leq |x|^{a+1}$.

    Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
  - ⋆ Ainsi, comme les fonctions f et g sont équivalentes en 0, on vient de montrer que pour $a > -1$, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

  Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme composées et produits de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

Applications des théorèmes sur la continuité

Exercice 17. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois racines dans $\mathbb{R}$.

Correction 17. On ne demande pas ici d'expliciter les trois racines réelles juste de montrer qu'il en existe trois. Ainsi il faut résoudre $f(x) = 0$ pour $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et cela fait donc penser au théorème de la bijection (et non le TVI car on va vouloir aussi l'unicité).

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
- Comme elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
- Limites aux bornes : par le théorème des monômes de plus haut degré, on obtient que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

- Il s'agit alors d'appliquer le théorème de la bijection sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$. A faire.

Exercice 18. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Correction 18.

1. **Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$:**
   - La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 1$.
   - Variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Les limites en $\pm\infty$ ont été obtenu par le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$:**
   - Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2, -1[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur]-2,-1[comme fonction polynomiale.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-2, -1[$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1 > 0$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet sur }]-2,-1[\text{ une unique solution réelle n}}$
   - Vérifions que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas d'autre solution sur $\mathbb{R}$:
     En appliquant de la même façon le théorème de la bijection sur chacun des intervalles où la fonction est strictement monotone, on montre que : $f(x) < 0$ sur $]-\infty, -2]$ et $f(x) > 0$ sur $[-1, +\infty[$ et ainsi $\boxed{\alpha \text{ est bien l'unique solution réelle à l'équation } f(x) = 0.}$

3. **Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près :** À faire avec la calculatrice en utilisant la méthode de dichotomie.

Exercice 19. Suites implicites, le retour !
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que : $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$. En déduire que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ ainsi que la limite de la suite.

Correction 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution :**
   La fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = 3x^2 + 3$. Ainsi $f_n'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
f_n		$\nearrow$	
	$-\infty$		

Les limites sont obtenu avec le théorème du monôme de plus haut degré. On a donc

- La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
- La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$ On note u_n cette solution.

2. **Montrer que :** $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}^\star$ **:**
On a : $f_n(0) = -n < 0$ et $f_n(n^{\frac{1}{3}}) = 3n^{\frac{1}{3}} > 0$. Comme par définition de u_n, on a : $f_n(u_n) = 0$, on vient de montrer que : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(n^{\frac{1}{3}})$. Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ainsi on a :
$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(n^{\frac{1}{3}}) \Leftrightarrow 0 < u_n < n^{\frac{1}{3}}.$$
Et donc on a aussi $\boxed{0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}.}$

3. **Montrer que la suite est croissante :**
Par définition de f_n, on a : $f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n$. De plus par définition de la suite, on a aussi que :
$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n - 1 = 0 \Leftrightarrow (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n = 1.$$
Ainsi on vient de montrer que : $f_n(u_{n+1}) = 1 > 0$. Comme $f_n(u_n) = 0$, on vient de prouver que : $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :
$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n.$$
Ainsi $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante.}}$

4. (a) **Montrer que pour tout** $n \in \mathbb{N}^\star$ **:** $\left(\dfrac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\dfrac{u_n}{n}$ **:**
On utilise la définition de la suite. En effet, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^3 + 3u_n - n = 0 \Leftrightarrow u_n^3 = n - 3u_n.$$
On divise alors cette égalité par $n > 0$ et on obtient que
$$\frac{u_n^3}{n} = 1 - 3\frac{u_n}{n} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}.}$$

(b) **En déduire que :** $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ **ainsi que la limite de la suite :**

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$. Ainsi on a :
$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = 0$, on obtient d'après le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.
Ainsi par somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{u_n}{n} = 1$. On vient donc de prouver que :

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1$ et par composition de limite (on compose par la fonction racine cubique continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = 1$. On vient donc bien de prouver que $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}.}$

- Par propriété sur les équivalents, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}} = +\infty$. Ainsi $\boxed{\text{la suite diverge vers } +\infty.}$

Exercice 20. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Correction 20. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$:
Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$ est équivalent à montrer que l'équation $h(x) = 0$ avec $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$. On est dans le cas d'un exercice abstrait (on ne connaît pas l'expression explicite de la fonction) et l'on doit montrer l'existence d'une solution à une équation. On est donc dans le cadre typique du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues car, par hypothèse, on sait que f et g sont continues sur $[0,1]$.
- On a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $h(1) = f(1) - g(1)$. Or $f(1) = g(0)$ et $g(1) = f(0)$. Ainsi on obtient que $h(1) = g(0) - f(0) = -h(0)$. Ainsi $h(0)$ et $h(1)$ sont de signes contraires donc il y en a forcément un positif et un négatif.

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $h(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi $\boxed{\text{l'équation } f(x) = g(x) \text{ possède au moins une solution dans } [0,1].}$

Exercice 21. Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe dans $[0,1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.

Correction 21.

1. Très classique. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution ce qui est équivalent à la résolution de $f(x) - x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution. Comme on ne veut pas l'unicité, on peut se douter qu'il va falloir utiliser le TVI. On a en effet :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
     On a aussi : $h(1) = f(1) - 1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

   Ainsi d'après le TVI, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est un point fixe de f.
2. Très classique. Même type de raisonnement que ci-dessus sauf que l'on veut l'unicité du point fixe, il va donc falloir utiliser le théorème de la bijection. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique ce qui est équivalent à la résolution de $f(x) - x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution. On a alors :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - La fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Il en est de même pour la fonction $x \mapsto -x$. Ainsi la fonction h est décroissante sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions décroissantes.

- On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
  On a aussi : $h(1) = f(1) - 1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est l'unique point fixe de f.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ alors elle est bornée.

Correction 22. On suppose que f possède des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on note respectivement l et l'. Ainsi par définition d'une limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A : |f(x) - l| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon' > 0, \exists A' > 0,\ \forall x \leq -A' : |f(x) - l'| \leq \varepsilon'.$$

Ainsi si on prend par exemple $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on a l'existence de $A > 0$ et de $A' > 0$ tel que :

- $\forall x \geq A :\ -1 \leq f(x) - l \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l \leq f(x) \leq 1 + l$
- $\forall x \leq -A' :\ -1 \leq f(x) - l' \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l' \leq f(x) \leq 1 + l'$.

Ainsi on a donc montré que sur $]-\infty, A']$ et sur $[A, +\infty[$, la fonction f est bien bornée. Il reste donc à étudier l'intervalle $[A', A]$. Mais la fonction f est alors continue sur le segment $[A', A]$, ainsi d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, la fonction f est bornée sur cet intervalle. Ainsi on a bien montré que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 23. Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \in [0,1]$ et $g^n(x) \in [0,1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

Correction 23. On suppose donc par l'absurde que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \neq g(x)$.

1. On pose la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - g(x)$. Comme pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \neq g(x)$, on obtient que pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$. Ainsi la fonction h ne s'annule pas sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le corollaire du TVI. En effet on a :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues.
   - Pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$.

   Ainsi d'après le corollaire du TVI, on sait que la fonction h garde un signe constant sur $[0,1]$: soit h est toujours strictement positive sur $[0,1]$, soit h est toujours strictement négative sur $[0,1]$. On peut donc supposer par exemple que h reste toujours strictement positive sur $[0,1]$ (le même type de raisonnement donnerait le même résultat si h reste toujours strictement négative). Ainsi pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) > g(x)$.
2. - La fonction h est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, on sait que h est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, il existe un minimum de h sur $[0,1]$ que l'on note m. Ainsi on a par définition d'un minimum :

   $$\forall x \in [0,1],\ h(x) \geq m \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq g(x) + m.$$

- Il reste donc à montrer que $m > 0$. Comme m est le minimum de h sur $[0, 1]$, on sait qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que : $m = h(c)$. Or on a supposé que h reste toujours strictement positive. Ainsi $m = h(c) > 0$.

Ainsi on a bien montré qu'il existe $m > 0$, tel que pour tout $x \in [0, 1]$: $f(x) \geq g(x) + m$.

3.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in [0, 1],\ f^n(x) \geq g^n(x) + mn$.
   - Initialisation pour $n = 1$: d'un côté, on a : pour tout $x \in [0, 1]$: $f(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in [0, 1]$: $g(x) + m$. D'après la question précédente on sait que pour tout $x \in [0, 1]$: $f(x) \geq g(x) + m$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $f(x) \geq g(x)+m$. En prenant $x = f^n(x) \in [0, 1]$, on obtient que : $f(f^n(x)) \geq g(f^n(x))+m$. Or on sait aussi que $f \circ g = g \circ f$ donc par une récurrence imédiate on pourrait montrer que $g \circ f^n = f^n \circ g$. Ainsi, on a pour tout $x \in [0, 1]$: $g(f^n(x)) + m = f^n(g(x)) + m$. Ainsi, on vient de montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x)) + m$. Mais par hypothèse de récurrence, on sait aussi que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $f^n(x) \geq g^n(x) + nm$. Ainsi en prenant $x = g(x) \in [0, 1]$, on a : $f^n(g(x)) \geq g^n(g(x)) + nm$, à savoir : $f^n(g(x)) \geq g^{n+1}(x) + nm$. Finalement, on a donc montré que pour tout $x \in [0, 1]$: $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x)) + m \geq g^{n+1}(x) + nm + m$ donc on a bien : $f^{n+1}(x) \geq g^{n+1}(x) + (n + 1)m$ et ceci pour tout $x \in [0, 1]$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in [0, 1]$: $f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
4. On fixe alors $x \in [0, 1]$ et on regarde ce que l'on obtient si on fait tendre n vers $+\infty$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g^n(x) + nm = nm\left(1 + \dfrac{g^n(x)}{nm}\right)$. Or la suite $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle est toujours comprise entre 0 et 1 et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et comme $m > 0$, on a : $0 \leq g^n(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{g^n(x)}{nm} \leq \dfrac{1}{nm}$. Ainsi en utilisant le théorème des gendarmes, on montre que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{g^n(x)}{nm} = 0$. Ainsi par propiétés sur les somme et produit de limites et comme $m > 0$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^n(x) + nm = +\infty$. Ainsi, on a
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^n(x) + nm = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de minoration, on sait que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$. Absurde car on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq f^n(x) \leq 1$. Ainsi on a bien aboutit à une contradiction et donc il existe bien $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 24. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliciter f^{-1}.

Correction 24.
- Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de la bijection.
  - ⋆ La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues et dérivables.
  - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ainsi $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ par propriété sur les composée, somme et quotient de limites.
  - ⋆ On a donc :
    - ◦ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
    - ◦ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
    - ◦ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.

- Expression de f^{-1} :
  On sait que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Or on a :
  $$y=f(x)\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2y\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2ye^x-1}{e^x}=0\Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0.$$
  On pose $X=e^x$ et on doit résoudre : $X^2-2yX-1=0$. Le discriminant vaut $\Delta=4(1+y^2)>0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Les solutions sont : $X_1=y+\sqrt{1+y^2}$ et $X_2=y-\sqrt{1+y^2}$. Un calcul rapide permet de vérifier que $X_2<0$ (il suffit de remarquer que : $1+y^2>y^2\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}>|y|\Leftrightarrow-\sqrt{1+y^2}<y<\sqrt{1+y^2}$) et ainsi $e^x=X_2$ n'admet aucune solution. Par contre comme on peut aussi montrer que $X_1>0$, l'équation $e^x=X_1$ admet une unique solution qui est : $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$. On obtient ainsi :
  $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=f(x)\Longleftrightarrow x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$
  Ainsi, on a pour tout $y\in\mathbb{R}$: $f^{-1}(y)=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

Exercice 25. Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\\ \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x<0\end{cases}$
Montrer que f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à préciser. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ? Expliciter f^{-1}.

Correction 25.

1. Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si pour $x<0$, on a : $x^2-1\neq 0$. Ainsi on a : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. Limites aux bornes du domaine :
   - Limite en $-\infty$: en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.
   - Étude en -1 : par propriétés sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=-\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
3. Continuité de la fonction f :
   - La fonction f est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. En particulier, on a que : $f(0)=0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.
   - Étude de la continuité en 0 : comme la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit étudier la continuité de f en 0 par les limites. On a déjà que la fonction f est continue à droite en 0 avec $f(0)=0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. Étude de la limite à gauche en 0 : on a : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi, on a : $f(0)=0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ et donc f est continue en 0.

   Ainsi la fonction f est continue sur son ensemble de définition.
4. Dérivabilité de la fonction f :

- La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pout tout $x<0$ avec $x\neq -1$, on a : $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pout tout $x\geq 0$, on a : $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. En particulier, elle est donc dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0)=0$.
- Étude de la dérivabilité en 0 : on étudie pour cela le taux d'accroissement quand x tend vers 0 par valeur inférieure. On a pour tout $x<0$, $x\neq -1$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x}{x^2-1}$. Ainsi par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$. Ainsi la fonction f est aussi dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0)=0$. Comme $f'_g(0)=0=f'_d(0)$, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

On a donc montré que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, on a : $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} & \text{si } x<0,\ x\neq -1\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

5. Variations de f : On remarque ainsi que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, on a : $f'(x)\geq 0$ et $f'(x)>0$ si $x\notin\{-1,0\}$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$. On obtient

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

6. Théorème de la bijection :
   - Étude sur $]-\infty,-1[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty,-1[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $]-\infty,-1[$ dans $]1,+\infty[$.
   - Étude sur $]-1,+\infty[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et par raccord continu en 0.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $]-1,+\infty[$ dans $]-\infty,1[$.
   - Ainsi la fonction f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
7. Propriétés de la réciproque : On a la continuité de f^{-1} sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme réciproque d'une fonction continue. On a les variations suivantes pour f^{-1} :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			$+\infty$ ‖		-1
f^{-1}		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	
	-1		‖ $-\infty$		

8. Expression de la réciproque : on sait donc que pour tout $x \neq -1$ et tout $y \neq 1$, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Comme f a deux expressions différentes, on doit donc faire deux cas :
   - Cas 1 : si $x \geq 0$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que $0 \leq y < 1$: on a alors
   $$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = y(1+x^2) \Leftrightarrow (1-y)x^2 = y.$$
   Comme $y < 1$, on a : $1-y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1-y$. On obtient alors : $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y}{1-y}$. De plus, comme $y \geq 0$ et $y < 1 \Leftrightarrow 1-y > 0$, les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$. Mais comme $x \geq 0$, on obtient finalement que :
   $$\forall x \geq 0, \forall y \in [0,1[: y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$
   - Cas 2 : si $x < 0$ avec $x \neq -1$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que soit $y > 1$, soit $y < 0$. On a alors :
   $$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = y(x^2-1) \Leftrightarrow (1-y)x^2 = -y.$$
   Comme $y > 1$ ou $y < 0$, on a dans tous les cas : $1-y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1-y$. On obtient alors : $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-y}{1-y} = \dfrac{y}{y-1}$. Or si $y > 1$ alors $\dfrac{y}{y-1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement positifs. Et si $y < 0$ alors $\dfrac{y}{y-1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement négatifs. Ainsi dans tous les cas $\dfrac{y}{y-1} > 0$. Les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x = \sqrt{\dfrac{y}{y-1}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{y}{y-1}}$. Mais comme $x < 0$, on obtient finalement que :
   $$\forall x < 0,\ x \neq -1, \forall y > 1 \text{ ou } y < 0 : y = f(x) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{y}{y-1}}.$$

   Finalement on obtient pour f^{-1} l'expression suivante : $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$

Exercice 26. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose, $\forall x \in]a,b[,\ f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]a,b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
2. Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1}.

Correction 26. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose : $\forall x \in]a,b[,\ f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$.

1. (a) **Démontrer que f réalise une bijection de $]a,b[$ sur un intervalle J que l'on précisera :**

- Étude de la fonction f :
La fonction f est bien définie sur $]a,b[$ et elle est dérivable sur $]a,b[$ comme composées et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in]a,b[$, on a :
$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} + \frac{-1}{(x-b)^2} = -\left[\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2}\right].$$
Ainsi $f' < 0$ comme somme de deux termes strictement négatifs. On obtient les variations suivantes sur $]a,b[$

x	a	b
f	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

Les limites en a et b sont obtenues par propriétés sur les quotients et somme de limites.
- Existence de f^{-1} :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $]a,b[$ comme composées et somme de fonctions continues.
  - ⋆ La fonction f est strictement d/'ecroissante sur $]a,b[$.
  - ⋆ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

  Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de }]a,b[\text{ sur } \mathbb{R}.}$ On a donc l'existence de $f^{-1} : \mathbb{R} \to]a,b[$.

(b) **Que peut-on dire de l'application f^{-1} ? :**
- La fonction f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ comme réciproque d'une fonction continue.
- La fonction f^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme réciproque d'une fonction strictement décroissante.
- $\forall x \in]a,b[,\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

2. **Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$:**
On a donc $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$. On sait que f est bijective de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ et donc on a en particulier que
$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$
On a donc :
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} - y = 0 \Leftrightarrow \frac{-yx^2 + 2x + y}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow -yx^2 + 2x + y = 0.$$
Vérifions donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, cette équation a une unique solution $x \in]-1,1[$.
- CAS 1 si $y = 0$:
L'équation à résoudre devient : $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi il existe bien une unique solution dans $]-1,1[$.
- CAS 2 : si $y \neq 0$:
On doit alors résoudre une vraie équation du second ordre et on obtient que le discriminant vaut : $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1+y^2)$. Ainsi $\Delta > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$. Il reste alors à vérifier que seule l'une des deux est entre -1 et 1 strictement.
  - ⋆ Résolution de : $x_1 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} < 1$:
  On a :
  $$\frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+y^2}-y}{y} < 0.$$

Étude du signe de $1-y-\sqrt{1+y^2}$:

$$1-y-\sqrt{1+y^2}>0 \Leftrightarrow 1-y>\sqrt{1+y^2}.$$

On fait alors deux cas :

- CAS a) : si $1-y<0 \Leftrightarrow y>1$: pas de solution car une racine carrée est toujours positive ou nulle, elle ne peut donc pas être strictement inférieure à un nombre strictement négatif. Ainsi si $y>1$, on a : $1-y-\sqrt{1+y^2}\leq 0$.
- CAS b) : si $1-y\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 1$: on peut alors passer au carré des deux côtés car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que les termes sont alors positifs. On obtient que :

$$1-y>\sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow 1+y^2-2y>1+y^2 \Leftrightarrow -2y>0 \Leftrightarrow y<0.$$

Ainsi sur $]-\infty,0[$, on a : $1-y-\sqrt{1+y^2}>0$ et sur $[0,1]$, on a : $1-y-\sqrt{1+y^2}\leq 0$.

On peut donc faire un tableau de signe et on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-\sqrt{1+y^2}-y$		$+$	0	-	
y		-	0	$+$	
x_1-1		-	||	-	

Ainsi pour tout $y\in\mathbb{R}^\star$, on a : $x_1<1$.

⋆ On peut montrer de la même façon que pour tout $y\in\mathbb{R}^\star$, on a : $x_1>-1$.

⋆ On peut montrer de la même façon que pour tout $y\in\mathbb{R}^\star$, on a : $x_2\notin]-1,1[$

Ainsi dans le cas où $y\in\mathbb{R}^\star$, il existe bien une unique solution dans $]-1,1[$ qui est donnée par $x=x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y}$.

On obtient donc l'expression de f^{-1} suivant :

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}}$$

Exercice 27. On note f la fonction définie par $f(x)=e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction.
3. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 27. On note f la fonction définie par $f(x)=e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

1. **Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée :**
   La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
   Étude de la limite en 0 :
   Par propriété sur les somme et les produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x)=-\infty$. Puis par

propriété sur la composition de limites, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. La nouvelle fonction est encore notée f et elle est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. **Étudier la fonction :**
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}}{x^2}[1 + x - \ln x]$. Comme pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}}{x^2} > 0$, le signe de f' ne dépend que du signe de la fonction $g : x \mapsto 1 + x - \ln x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de fonction dérivables et pour tout $x > 0$: $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$. On obtient donc :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Ainsi 2 est le minimum global de g et donc pour tout $x > 0$: $g(x) > 0$. Ainsi f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $+\infty$ de f s'obtient par somme, produit et composée de limites.

3. **On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}^+$.
     - $\star$ Étude de la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$:
       - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+$.
       - La fonction f est continue en l car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, produit et composée de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

       Ainsi d'après le théorème sur les suite et fonction, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
     - $\star$ De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ car la suite converge vers l d'après ce que l'on a supposé.
     - $\star$ Ainsi en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que : $\boxed{l = f(l)}$.
   - Il reste alors à résoudre $f(l) = l$:
     - $\star$ Comme $f(0) = 0$, 0 est un point fixe de f.

- $\star$ Pour tout $x \neq 0$, on doit alors résoudre : $e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = x$. On a

$$e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = x \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ainsi 1 est aussi point fixe de la fonction f.

On vient donc de prouver que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a deux limites éventuelles qui sont 0 et 1.}}$

Exercice 28. On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 28. On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. **Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée :**
La fonction f est bien définie si $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
Étudions la limite en 0 : en utilisant les équivalents usuels, on a : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et ainsi par quotient d'équivalents, on a : $f(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La nouvelle fonction est encore notée f et elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. **On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
     - $\star$ Étude de la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$:
       - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
       - La fonction f est continue en l car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

       Ainsi d'après le théorème sur les suite et fonction, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
     - $\star$ De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ car la suite converge vers l d'après ce que l'on a supposé.
     - $\star$ Ainsi en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que : $\boxed{l = f(l)}$.
   - Il reste alors à résoudre $f(l) = l$:
     - $\star$ Comme $f(0) = 1 \neq 0$, 0 n'est pas point fixe de f.
     - $\star$ Pour tout $l \neq 0$, on doit alors résoudre : $\dfrac{l}{e^l - 1} = x$. On a

$$\frac{l}{e^l - 1} = x \Leftrightarrow l = l(e^l - 1) \Leftrightarrow 1 = e^l - 1 \Leftrightarrow e^l = 2 \Leftrightarrow l = \ln 2,$$

car on a $l \neq 0$. Ainsi la seule limite éventuelle est $\boxed{l = \ln 2}$.

Exercice 29. Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction 29.

1.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g\left(\frac{x}{2^0}\right) = g(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Mais si on pose $X = \frac{x}{2n}$, on sait aussi par hypothèse sur g que : $g(X) = g\left(\frac{X}{2}\right)$, à savoir : $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(\frac{x}{2^n} \times \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$. On vient donc de montrer que : $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On sait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Or on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et par propriété sur le produit de limites. On a donc
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$
   - La fonction g est continue en 0 par hypothèse.

   Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on obtient que : $\lim\limits_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0)$. Comme on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x) = g(x)$ car $g(x)$ ne dépend pas de n, on a par unicité de la limite que : $g(x) = g(0)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on vient bien de montrer que g est constante tout le temps égale à $g(0)$.

Exercice 30. Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.

Correction 30. On fait ici un raisonnement par analyse-synthèse. **Analyse :** On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie la condition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. On a : $f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

2. (a) Montrons que f est une fonction impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ par hypothèse sur f. Mais $f(x + (-x)) = f(0) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi on vient de montrer que $f(x) = -f(-x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Ainsi la fonction f est bien une fonction impaire.

   (b) Montrons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a : $f(0 \times x) = f(0) = 0$ et de l'autre côté, on a : $0 \times f(x) = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x)$ par hypothèse sur la fonction f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait que : $f(nx) = nf(x)$. Ainsi, on obtient que : $f((n + 1)x) = f(x) + nf(x) = (n + 1)f(x)$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.

   (c) Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a ainsi $-n \in \mathbb{N}$ et on vient donc de démontrer que : $f(-nx) = -nf(x)$ car $-n \in \mathbb{N}$ et en appliquant le résultat de la récurrence ci-dessus. En utilisant alors de plus le fait que la fonction f est impaire, on sait alors que : $f(nx) = f(-(-nx)) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x)$ ce qui est le résultat voulu.

   Ainsi, on vient bien de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.

3. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ fixés. On calcule $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right)$ de deux façons différentes. En effet, on a d'un côté : $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right) = f(p) = f(p \times 1) = pf(1) = pa$ car $p \in \mathbb{Z}$ et en appliquant la question précédente avec $x = 1$. Mais d'un autre côté, on a aussi : $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right) = qf\left(\dfrac{p}{q}\right)$ en appliquant cette fois ci la question précédente avec $x = \dfrac{p}{q}$. Ainsi, on obtient l'égalité suivante : $pa = qf\left(\dfrac{p}{q}\right) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}a$ ce qui est le résultat attendu.

4. On utilise alors le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait donc qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. On peut alors remarquer deux choses :
   - Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(r_n) = r_n a$ d'après la question précédente car $r_n \in \mathbb{Q}$, on a par propriété sur le produit de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = xa$.
   - De plus, on a aussi :
     - ⋆ $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$
     - ⋆ f est continue en x car elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par hypothèse de départ.

     Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x)$.

   Ainsi par unicité de la limite, on obtient que : $f(x) = ax$.

5. On a donc ainsi montrer dans l'analyse que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ alors la fonction f est une fonction linéaire.
   Synthèse : comme toutes les fonctions linéaires, à savoir toutes les fonctions de type $f : x \mapsto ax$ sont bien continues et vérifient bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x + y) = f(x) + f(y)$, on obtient : l'ensemble des fonctions f cherchées est l'ensemble des fonctions linéaires.