Table des matières

Chapitre 12 : Continuite

Dans tout ce qui suit, les fonctions considérées sont des fonctions numériques.
f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Son domaine de définition noté $\mathcal{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

I Continuité en un point

I. 1 Définition de la continuité en un point :

Définition 1. Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que la fonction f est continue en x_0 si

Exercice 1.

1. Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

I. 2 Continuité à droite et à gauche en un point

Lorsque la fonction se comporte de façon différente à droite et à gauche de $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on doit regarder la continuité à droite et à gauche en x_0.

Exemple type : les fonctions définies par des raccords.

Définition 2. Soit f une fonction définie en x_0. On suppose que x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$.

- On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si ....
- On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si ....

Exercice 2. Étudier la continuité en 0 à droite et à gauche de la fonction partie entière.

I. 3 Lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point

Proposition 1. Soit f une fonction définie en x_0, où x_0 n'est pas une extrémité de $\mathcal{D}_f$. On a alors :

f continue en $x_0 \iff$ .... $\iff$ ....

Exemple 1. Étudier la continuité en 0 de la fonction partie entière.

Exercice 3. Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

II Continuité sur un intervalle

II. 1 Définition de la continuité sur un intervalle

Définition 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

- Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue sur I si ....
- L'ensemble des fonctions continues sur I est noté ....ou ....
- On dit que f ....

II. 2 Continuité des fonctions usuelles

En repassant par la définition, on peut ainsi démontrer la continuité des fonctions usuelles suivantes :

....

....

II. 3 Continuité et opérations algébriques

Proposition 2. Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ alors

- ....
- ....
- ....
- ....

II. 4 Continuité et composition entre deux fonctions

Proposition 3. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors ....

Méthode pour montrer la continuité sur un intervalle :

Par somme, produit, composée, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles.

Exercice 4. Étudier la continuité sur $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$
3. $f(x) = \ln\left(e^{-x^4} + 3\right)$
4. $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{\tan(\pi x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

III Prolongement par continuité

La fonction f est définie au voisinage de x_0 MAIS PAS en x_0 : $\boxed{x_0 \notin \mathcal{D}_f}$. On calcule donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour savoir si on peut prolonger par continuité la fonction en x_0.

III. 1 Prolongement par continuité

Définition 4. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f telle que : $\begin{cases} \boxed{f \text{ non définie en } x_0} \\ f \text{ admet une limite finie en } x_0 \text{ notée } l. \end{cases}$

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :

s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0. Par abus de notation, on la note encore …….

III. 2 Prolongement par continuité à droite et à gauche

Lorsque la limite en x_0 n'existe pas, cela vient le plus souvent du fait que les limites en x_0 à droite et à gauche ne sont pas les mêmes. On peut alors regarder si la fonction est prolongeable par continuité à droite ou à gauche.

Proposition 4. Existence du prolongement par continuité à droite ou à gauche :
Soit f une fonction non définie en x_0.

- Prolongement par continuité à droite :
  - ⋆ f admet un prolongement par continuité à droite en x_0 si ....
  - ⋆ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :
- Prolongement par continuité à gauche :
  - ⋆ f admet un prolongement par continuité à gauche en x_0 si ....
  - ⋆ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :

Exercice 5. Étudier les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x}{-x^2 - x + 2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

IV Théorèmes sur les fonctions continues définies sur un intervalle

IV. 1 Composition entre une fonction et une suite, application aux suites récurrentes :

On rappelle le résultat vu lors du chapitre sur les suites.

Proposition 5. Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si

- ....
- ....

Alors ....

Exercice 6. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ln(2 + x)$.

IV. 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème

Théorème 6. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Si on a :

- ....
- ....

alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$: ....

Exercice 7.

1. Montrer que toute fonction polynôme de degré 3 a au moins une racine réelle sur $\mathbb{R}$. De même montrer que toute fonction polynôme de degré impair a au moins une racine réelle sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'elle admet un point fixe.
3. Soient deux fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = g(c)$.

IV. 3 Théorème de la bijection

Théorème de la bijection et fonction réciproque

Théorème 7. Soient $f : I \to \mathbb{R}$. Si on a :

- ....
- ....

alors :

- ....
- ....
- ....

Exercice 8.

1. Étude de la bijectivité de la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2^x$.
2. Étude de la bijectivité de la fonction $f : \; x \mapsto \dfrac{x+2}{x-2}$. Donner ensuite l'expression de f^{-1}.

Fonction arctangente

Proposition 8. La fonction tangente est bijective de ....dans ....
Sa fonction réciproque est la fonction arctangente, définie de ....dans ...., et notée .... On a de plus :

- Monotonie : la fonction arctangente est ....
- Parité : la fonction arctangente est ....

Fonctions arccosinus et arcsinus

Ces fonctions ne font pas partie des fonctions usuelles du programme : il faut refaire la démonstration pour démontrer leur existence et leurs propriétés.

Exercice 9.

- Montrer que la fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arccosinus, et est notée arccos. Faire sa représentation graphique.
- Montrer que la fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arcsinus, et est notée arcsin. Faire sa représentation graphique.

Exercice 10.

1. Étude des points fixes de la fonction tangente sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \left]2n\pi, 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $u_n \sin(u_n) = 1$.

IV. 4 Fonction continue sur un segment

Définition 5. Définition d'un segment de $\mathbb{R}$:

Un segment de $\mathbb{R}$ est ....

Exemples.

- Exemples de segment de $\mathbb{R}$: ....

- Exemples d'intervalles de $\mathbb{R}$ non segment : ....

Théorème 9. Théorème d'une fonction continue sur un segment :

- ....
  ....
- Plus précisement, si f est continue sur $[a, b]$ alors :

Exercice 11. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^{12} - 2x^5 + 3x^3 - 1$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.