

TD 12 : continuité

Entraînements

Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 1. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \cos(\ln|x|) \ln(1+x).$$

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad 3. h(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 + 4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \quad \text{et} \quad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a , b et c pour lesquels h est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} .

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$.
2. En déduire que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur \mathbb{R} .

Partie Entière

Exercice 6. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E .
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a .
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E) .

Exercice 7. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \implies [x] \leq [y].$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left[\frac{[nx]}{n} \right] = [x]$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = [nx].$$

Exercice 9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$[x] = \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right].$$

Exercice 10. Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer la limite de f en n à gauche et à droite.
3. En déduire l'ensemble de continuité de f .

Existence d'un éventuel prolongement par continuité

Exercice 11. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$ | 8. $f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{ x }$ |
| 2. $f(x) = \frac{ x \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}.$ | 9. $f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$ |
| 3. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1).$ | 10. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 4. $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ | 11. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ | 12. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ |
| 6. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$ | 13. $f(x) = x^x$ |
| 7. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$ | |

Exercice 12. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f .

Exercice 13. Peut-on prolonger par continuité en les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

2. $g(x) = x^x$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{e^x - 1}$.

L'application f admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n par $f_n(x) = \frac{e^{x^2} - e}{x^{2n} - 1}$. Quel est son ensemble de définition ? La fonction f_n admet-elle un prolongement par continuité définie sur \mathbb{R} ?

Exercice 16. Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur \mathbb{R} .

Applications des théorèmes sur la continuité

Exercice 17. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois racines dans \mathbb{R} .

Exercice 18. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 19. Suites implicites, le retour !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . On note u_n cette solution.
2. Montrer que : $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$. En déduire que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ ainsi que la limite de la suite.

Exercice 20. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 21. Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ alors f admet un point fixe dans $[0, 1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ alors elle est bornée.

Exercice 23. Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1] : f^n(x) \in [0, 1]$ et $g^n(x) \in [0, 1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

Exercice 24. Montrer que $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Expliciter f^{-1} .

Exercice 25. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est une bijection de \mathcal{D}_f sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à préciser. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ? Expliciter f^{-1} .

Exercice 26. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose, $\forall x \in]a, b[$, $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
2. Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1} .

Exercice 27. On note f la fonction définie par $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction.
3. On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 28. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résolution d'équations fonctionnelles

Exercice 29. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur \mathbb{R} .

Exercice 30. Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.