Table des matières

Chapitre : derivation

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I Dérivabilité en un point

I. 1 Dérivabilité en un point : définition

Définition 1. Taux d'accroissement :
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ avec $x \neq x_0$, on appelle taux d'accroissement de f entre x et x_0 le quotient :

$\tau_{f,x_0}(x) =$. . . . .

Définition 2. Dérivabilité d'une fonction en un point :
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- On dit que f est dérivable en x_0 si ....
  ....
- Si cette limite existe, elle est notée . et est appelée le nombre dérivée de f en x_0 :

Remarque changtement de variable $(f(x_0+h)-f(x_0))/h$
Exemple : exp. ln. sin. racine carrée.

Exercice 1.
1. Étudier la dérivabilité de la fonction carrée en 1.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction cube en 2.

Exercice 2.
1. Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.
2. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 3.
1. Étude de la dérivabilité en 2 de la fonction définie par $f(x) = -x+\sqrt{(x-2)^2(x-1)}$.
2. Étude de la dérivabilité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \texttt{signe}(x)\sqrt[3]{|x|}$, où $\texttt{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
3. Étude de la dérivabilité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

I. 2 Interprétation graphique

Proposition 1. Tangente :
Si la fonction f est dérivable en x_0 alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente qui a pour équation : ....

Remarque. La connaissance de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ permet de tracer la courbe au voisinage du point M d'abscisse x_0. Pour un tracé encore plus précis, on étudie souvent la position de la courbe par rapport à la tangente, à savoir le signe de $f(x)-y = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$.

Exemples. Représentation graphique des fonctions exponentielle et logarithme népérien. On précisera leur tangente à leur courbe respectivement aux points d'abscisse 0 et 1.

Exercice 4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(x+1)e^x}$. Équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 .

Définition 3. Tangente verticale :
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que la fonction f est continue en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ ....

Exercice 5. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x + |2x(x+2)|$. Étude de la dérivabilité en 0.

I. 3 Lien entre la dérivabilité et la continuité

Proposition 2. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 alors ....

⚠ La réciproque est fausse : ....

Remarque. Par contraposée, on obtient ....

II Dérivabilité sur un intervalle

II. 1 Dérivabilité sur un intervalle : définition

Définition 4. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

- La fonction f est dérivable sur l'intervalle I si elle ....
- On appelle alors fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$.

II. 2 Opérations algébriques sur les dérivées

Proposition 3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

- $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- fg est dérivable sur I et $(fg)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \ldots\ldots$
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \ldots\ldots$

Exercice 6. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée : $f(x) = \dfrac{xe^x}{\ln x}$ et $g(x) = \dfrac{x^\alpha e^x + x^2}{\cos x}$.

II. 3 Dérivabilité d'une composée

Proposition 4. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J et .... alors :

- $g \circ f$ est dérivable sur ....
- ....

Exemples. Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit u une fonction dérivable sur I. Alors :

- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et $(\cos(u))' =$ ....
- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et $(\sin(u))' =$ ....
- La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' =$ ....
- Si $\forall x \in I$ .... alors la fonction $\ln|u|$ est dérivable sur I et $(\ln|u|)' =$ ....
- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' =$ ....
- Si $\forall x \in I$ .... alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' =$ ....
- Si $\forall x \in I$ .... alors u^α est dérivable sur I et $(u^\alpha)' =$ ....
- Si $\forall x \in I$ .... alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' =$ ....
- Si v est dérivable sur I et $\forall x \in I$ .... alors u^v est dérivable sur I et $(u^v)' =$ ....

Exercice 7. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f(x) = \sqrt{1 - 2\cos(x)}$
2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1 - x^2} + 1\right)$
3. $f_3(x) = \left(1 + e^{-x^2}\right)^{x^2 - 3x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 3}{-x + 1}\right)$

II. 4 Dérivabilité d'une fonction réciproque

Théorème 5. Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque :
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective de I dans J. Elle admet ainsi une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.
Si :

- ....
- ....

Alors ....et $\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) =$ ....

Méthode pour étudier la dérivabilité d'une réciproque :

- On justifie que f est dérivable sur un intervalle et on calcule la dérivée f' de f.
- On détermine tous les points x_0 où f' s'annule : cela nous donne l'intervalle I qui permet d'appliquer le théorème.
- On calcule tous les $y_0 = f(x_0)$ correspondants : cela nous donne tous les points à enlever et on connaît ainsi l'intervalle J sur lequel f^{-1} va être dérivable.
- On applique le théorème en commençant par énoncer les deux hypothèses.
  On sait alors que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J, et que $\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exemples.

- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arctangente.
- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction racine n-ième.
  - ⋆ Cas où n est pair :
  - ⋆ Cas où n est impair :

III Théorèmes utilisant la dérivabilité sur un intervalle

III. 1 Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction

Théorème 6. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :

- La fonction f est croissante sur $I \iff$ ....
- La fonction f est décroissance sur $I \iff$ ....
- La fonction f est constante sur $I \iff$ ....
- Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points alors

  ....
- Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points alors

  ....

Application : ....

Remarque. ⚠ La réciproque des dernières propriétés est fausse. Contre-exemple : ....

Exercice 8. Étudier les variations des fonctions définies par : $f(x) = \ln(e - e^{-\frac{1}{x}})$, $g(x) = \dfrac{\ln x}{1+x}$, et $h(x) = x^n \ln(x)$.

III. 2 Recherche d'extremum

Condition nécessaire d'existence d'extremum local :

Proposition 7. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si :

- f est dérivable sur I
- et f admet un extremum en $x_0 \in I$ x_0 n'est pas une borne de l'intervalle

Alors $f'(x_0) = 0$

Remarques.
1. ⚠ Ce n'est qu'une condition nécessaire d'existence d'extremum :...............

2. Toutes les hypothèses sont importantes, en particulier ce théorème est faux si x_0 est une borne de I.
   Exemple : ....
3. Le théorème nous dit que si une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert alors

Condition nécessaire et suffisante d'extremum local :

Proposition 8. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si :

- ....
- ....
- ....

Alors ....

Exercice 9. Montrer que : $\forall x > 0,\ \ln x < \sqrt{x}$ et $\forall x \geq 0,\ (1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$ avec $\alpha > 1$.

III. 3 Théorème de Rolle

Théorème 9. Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si :

- ....
- ....
- ....

Alors ....

Remarques. ⚠ Importance de toutes les hypothèses : si on retire une des hypothèses du théorème de Rolle, celui-ci ne s'applique plus.

- Si $f(a) \neq f(b)$:
- Si on supprime l'hypothèse de dérivabilité sur $]a, b[$:
- Si on supprime la continuité sur $]a, b[$,
- Si on supprime la continuité aux extremités, par exemple en b :

Quand penser au théorème de Rolle :

- Type d'exercices : Exercices plutôt théoriques lorsque l'on ne connaît pas l'expression de la fonction.
- Y penser dès que l'on veut déterminer l'existence de racines pour la dérivée ou les dérivées successives d'un polynôme.
- Y penser dès que l'on parle de valeurs d'annulation pour la dérivée ou les dérivées successives d'une fonction.

Exercice 10. Soit P un polynôme ayant deux racines réelles distinctes. Montrer que P' admet au moins une racine.

III. 4 Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis

Théorème 10. Soient $a,\ b$ deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

- ....
- ....

Alors ....

Remarque. Lorsque $a \neq b$, la conclusion est qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que : ....

Autrement dit, il existe un point de $]a, b[$ où la dérivée est égale au taux d'accroissement entre a et b.

Démonstration. $g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a)$ □

Exercice 11. Lorsque la dérivée de la fonction est bornée, le théorème des accroissements finis permet de montrer des inégalités appelées “inégalités des accroissements finis”. On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Montrer que s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall x \in \,]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M$, alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
2. Montrer que s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq K$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$.

Applications

❶ Obtenir des inégalités :

- On fixe un réel x.
- On applique le TAF à une fonction sur un intervalle de type $[0, x]$, $[x, x + 1]$, $[1, x]$...
- On encadre alors la dérivée de la fonction afin d'obtenir l'encadrement cherché.

Exercice 12. Montrer les inégalités suivantes :

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $x < e^x - 1 < xe^x$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$ et $|\cos x - 1| \leq |x|$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$.

❷ Obtenir la convergence de suite définie par récurrence

- Penser au TAF pour montrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq C\,|u_n - \alpha|$ avec α point fixe de la fonction f associée à la suite, lorsque l'on sait que la dérivée f' est bornée.
- Appliquer alors le TAF à la fonction f entre u_n et α.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + 1$.

1. Montrer que f a un unique point fixe que l'on notera α.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
3. Conclure quand à la convergence de la suite.

Exercice 14. Soit $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \ln(2 + x)$.

1. Étudier la fonction f et montrer que f a un unique point fixe dans $[1, 2]$ que l'on notera α.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - \alpha|$ et conclure quant à la convergence de la suite.

IV Dérivées d'ordre supérieur

IV. 1 Définitions

Définition 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On note $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre 0 de f).
- Les dérivées successives de f sont alors définies par récurrence.
  La fonction f est $n+1$ fois dérivable sur I si

  ⋆ ....

  ⋆ ....

  Dans ce cas, on note ....

⚠ Ne pas confondre ....

Exercice 15. Calculer la dérivée première, seconde, troisième et quatrième du cosinus et de l'exponentielle.

Définition 6. Fonctions de classe C^n et C^∞ :

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si
  - $\star$ ....
  - $\star$ ....

  On note alors .... l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions ....
- $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions ....
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ....

  On note .... l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

IV. 2 Dérivées successives des fonctions usuelles

Régularité des fonctions usuelles :

- Continuité des fonctions usuelles :

  ....

- Caractère C^∞ des fonctions usuelles :

  La plupart des fonctions que nous rencontrerons cette année seront de classe C^∞. Par exemple :
  - $\star$ ....
  - $\star$ ....
  - $\star$ ....

Méthode pour trouver les dérivées successives :
- Calcul des premières dérivées.
- Conjecture de l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Démonstration de la conjecture par récurrence.

1. **Dérivées successives de la fonction inverse :**

2. **Dérivées successives de la fonction logarithme népérien :**

3. **Dérivées successives des fonctions sinus et cosinus :**

Expressions des dérivées successives des fonctions usuelles :

- Fonction exponentielle : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,
$$f^{(n)}(x) = e^x.$$
- Fonction ln : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{+\star})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\star},\ \forall x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$
- Fonction polynomiale : cf cours polynôme.
- Fonction inverse : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{\star})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{\star}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$
- Fonction $x \mapsto x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$: $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{+\star})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$
- Fonction cosinus : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
- Fonction sinus : $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 16. Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes : $x \mapsto e^x$ puis $x \mapsto e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}^{\star}$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$, $a \in \mathbb{R}$.

IV. 3 Opérations et dérivées successives

IV. 3. a Dérivées successives d'une somme

Proposition 11. Somme et multiplication par un réel :

- Si f et g sont deux fonctions de classe C^n alors ....

  Et de plus $(f+g)^{(n)} =$ ....

- Si f est une fonctions de classe C^n et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors ....

  Et de plus $(\lambda f)^{(n)} =$ ....

Exercice 17. Calculer les dérivées successives de la fonction suivante : $f : x \mapsto x^5 - \ln(x-2) + 5e^{-x}$.

IV. 3. b Dérivées successives d'un produit :

Proposition 12. Produit de deux fonctions :
Si f et g sont deux fonctions de classe C^n alors ....

Exercice 18. La formule de la dérivée d'un produit, appelée "formule de Leibniz" n'est pas au programme. Il faut savoir la démontrer pour pouvoir l'utiliser.

1. Montrer que si f et g sont de classe C^n, alors $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
2. En déduire les dérivées successives des fonctions suivantes : $f : x \mapsto x^3 e^{-4x}$, $g : x \mapsto x^4 \sin(x)$ et $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4-x}$.

IV. 3. c Dérivées successives d'un quotient :

Proposition 13. Quotient de deux fonctions :
Si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I et g ne s'annule pas sur I alors ....

Remarque. Si l'on connaît les dérivées successives de $\dfrac{1}{g}$, on peut utiliser la formule de Leibniz pour calculer les dérivées successives de $\dfrac{f}{g}$.

Exercice 19. Étudier la régularité de la fonction tangente.

IV. 3. d Dérivées successives d'une composée :

Proposition 14. Composée de deux fonctions :
Si f et g est de classe C^n sur I, g est de classe C^n sur J avec ....alors ....

Remarque. Le calcul des dérivées successives d'une composée utilise généralement une récurrence.

Exercice 20. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) f(x)$.

IV. 3. e Dérivées successives d'une fonction réciproque :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bijective de I sur $J = f(I)$. Ainsi $f^{-1} : J \to I$ existe et on cherche à connaître sa régularité sur J.

Proposition 15. Fonction réciproque :
Si :

- ....
- ....

Alors ....