TD 13 - Dérivation

I Calculs de dérivés

Exercice 1. Avec des polynômes.
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
3. $f(x) = \dfrac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{(x-1)^5}$
4. $f(x) = \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$
5. $f(x) = (4-3x)^5$
6. $f(x) = \dfrac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$

Exercice 2. Mêmes questions, avec des racines et valeurs absolues.

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
2. $f(x) = x^n\sqrt{1-x}$, $n \in \mathbb{N}^\star$
3. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^2$
5. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$
6. $f(x) = x|x|$

Exercice 3. Mêmes questions, avec des exponentielles et logarithmes.

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $f(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = \ln|(x^2+1)^3|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^x - 1}{x^x + 1}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
7. $f(x) = \ln(\ln x)$
8. $f(x) = |\ln(x)|$

Exercice 4. Mêmes questions, avec des fonctions trigonométriques.

1. $f(x) = \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
2. $f(x) = \cos^4 x$
3. $f(x) = (\sin(x))e^{\cos x}$
4. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
5. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

Exercice 5. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$.

Exercice 6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0.
Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$.

II Étude de la régularité d'une fonction

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{1-e^{-3x}}$.

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes. Étudier la continuité de f, et prolonger f par continuité lorsque c'est possible.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction prolongée.

Exercice 9. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de g.

Exercice 10. On pose $f(x) = \begin{cases} \exp(x^2 - 3x + 2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 - \dfrac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue ? Dérivable ?
3. Étudier les variations de f. Tracer la courbe.
4. Montrer que f est une bijection de $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ sur un intervalle à déterminer.
5. Étudier la fonction réciproque : domaine de définition, continuité, variations, dérivabilité, courbe.
6. Déterminer explicitement l'expression de la réciproque.

III Utilisation des théorèmes liés à la dérivation

Exercice 11. Montrer que si f est dérivable n fois sur $[a,b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant dont toutes les racines sont réelles et simples. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Exercice 13. Soient p et q éléments de $\mathbb{R}$ et n entier non nul. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ ne peut avoir plus de deux racines si n est pair, plus de trois si n est impair.

Exercice 14. Soit f de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que f' est strictement positive sur $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f'(x) \geq a$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors pour tout x de $[0,1]$ on a : $f(x) \geq ax$.

Exercice 15. Soient $a > b$ et deux fonctions f et g définies sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ensemble. On suppose que l'on a

$$f(a) = g(a) \qquad f(b) = g(b) \qquad \text{et} \qquad f^{(2)} \leq g^{(2)}.$$

En étudiant $g - f$, montrer que : $g \leq f$.

Exercice 16. Montrer les inégalités suivantes

1. Pour tous réels $a,\ h$ tels que $0 < a < a + h < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(a+h) < \sin a + h\cos a$.
2. $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x \geq 0, \quad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ avec $\alpha > 1$.
4. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$.
5. $\forall (x, y) \in]-\infty, 0]^2, \quad |e^x - e^y| \leq |x - y|$.

Exercice 17. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \end{cases}$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|v_{n+1} - 4| < \dfrac{1}{4}|v_n - 4|$
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 18. Série de Riemman.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Donner un encadrement du terme u_n et en déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi que sa limite.
3. (Plus dur) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$. En considérant $(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}$, déterminer un encadrement puis un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

IV Calculs de dérivées n-ièmes

Exercice 19. Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à tout ordre et $g,\ h$ les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ par : $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculer $g',\ g'',\ g''',\ h',\ h'',\ h'''$ en fonction de $f',\ f'',\ f'''$.

Exercice 20. Linéariser $f(x) = \cos^3(x)$ et en déduire l'expression de la dérivée n-ième de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Étudier la régularité et donner la dérivée n-ième des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ et $g(x) = x^5 - \ln(x-2) + 5e^{-x}$.

Exercice 22. Soit $f :] -1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Donner l'expression de f', f'' et de f'''.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer cette conjecture.

4. Soit $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. En vérifiant que l'on peut écrire h sous la forme

$$\forall x \in]-1,1[, \quad h(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de la dérivée n-ième de h.

Exercice 23. Soit la fonction f_{n-1} définie par : $f_{n-1}(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 24. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction tan est de la forme $P_n \circ \tan$ où P_n est un polynôme de degré $n+1$ dont on déterminera le coefficient dominant.

Exercice 25. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Exercice 26. Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
3. Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

Exercice 27. Soit la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence que la dérivée n-ième est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n \sqrt{1-x^2}}$, où P_n est un polynôme. Donner une relation (R) entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
3. Montrer que P_n est une fonction paire si n est pair et une fonction impaire si n est impair.
4. Montrer par récurrence en utilisant la relation (R) que $P'_n = n^2 P_{n-1}$.
5. En déduire que les polynômes P_n vérifient pour tout entier $n \geq 1$ la relation de récurrence suivante

$$P_{n+1} = (2n+1) X P_n + n^2 (1 - X^2) P_{n-1}.$$