Correction TD 14 : Polynômes

I Opérations sur les polynômes

Exercice 1. On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Correction 1.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X + 1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

Exercice 2. Développer le polynôme suivant : $Q = (X^3 + X^2 + X + 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$.

Correction 2. On développe $Q = (X^3 + X^2 + X + 1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$ et on obtient :
$Q = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^{k+3} + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^{k+2} + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$. On fait alors des changements de variable dans les trois premières sommes et les indices de sommation étant muets, on obtient :
$Q = -\sum_{k=3}^{2n+3}(-1)^k X^k + \sum_{k=2}^{2n+2}(-1)^k X^k - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k X^k + \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$. En utilisant alors la relation de Chasles, on obtient : $Q = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$. On a utilisé aussi le fait que : $(-1)^{2k-3} = (-1)^{2n+3} = (-1)^{2k-1} = (-1)^{2n+1} = (-1)^3 = (-1)^1 = -1$ et $(-1)^{2k-2} = (-1)^{2n+2} = (-1)^{2k} = (-1)^{2n} = (-1)^2 = (-1)^0 = 1$.

Exercice 3. Simplifier le polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(1 - X)^{3n-2k}X^k$.

Correction 3. On cherche à faire apparaître la formule du binôme de Newton. On a :

$$R = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(1 - X)^{3n-2k}X^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3X)^k[(1 - X)^3]^{n-k}(1 - X)^k$$

car $[(1 - X)^3]^{n-k}(1 - X)^k = (1 - X)^{3n-3k}(1 - X)^k = (1 - X)^{3n-2k}$. On obtient alors :

$$R = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[3X(1 - X)]^k[(1 - X)^3]^{n-k}$$

et sous cette forme on reconnaît la formule du binôme de Newton. Ainsi on obtient : $R = \big(3X(1 - X) + (1 - X)^3\big)^n$, soit : $\boxed{R = (1 - X)^n(X^2 + X + 1)^n}$.

Exercice 4. Calculer $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P = X^2 - 3X + 1$ et $Q = X^2 - 3X + 2$.

Correction 4. Les calculs donnent : $P(Q) = Q^2 - 3Q + 1 = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 3X - 1$ et $Q(P) = P^2 - 3P + 2 = X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 2X$.

II Degré et coefficients

Exercice 5. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Correction 5.

1. On sait donc que P est de degré 3 et que -1 est racine de P. Ainsi P est de la forme $P = (X+1)(aX^2+bX+c)$. Puis on utilise le fait que : $P(1) = 4$, $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$. Ces trois conditions permettent d'obtenir le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 2 \\ 4a-2b+c & = & 5 \\ 4a+2b+c & = & 5 \end{array}\right.$. La résolution donne : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On a donc ainsi entierement déterminé P : $\boxed{P = (X+1)(X^2+1)}$.
2. Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2+2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & -3 \\ bc & = & -2 \\ c^2 & = & 4 \end{array}\right.$. Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :
   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
   - si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
   - si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

   Ainsi il y a deux solutions qui sont : $\boxed{P = -X^2 - X + 2 \text{ et } P = X^2 + X - 2}$.

Exercice 6. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X+1)^n - (X-1)^n$
3. $P^2 - P + 1$
4. $Q = P(X+1) - P$
5. $\sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Correction 6.

1. On a : $(X^4+1)^3 = P(Q)$ avec $P = X^3$ et $Q = X^4 + 1$. Ainsi par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on obtient que $\deg (X^4+1)^3 = 12$. De plus, en développant avec le binôme de Newton, on obtient que le coefficient dominant est 1.
2. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n = Q - R$. Par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on sait que $\deg P \leq \deg Q$, à savoir : $\deg P \leq n$. Pour connaître exactement son degré, il faut regarder les termes de plus haut degré dans Q et R et regarder s'ils s'annulent. Par le binôme de Newton, on sait que : $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ et $R = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. On commence par regarder les termes en X^n et on obtient : $P = \binom{n}{n} X^n - \binom{n}{n} (-1)^0 X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi les termes devant X^n

s'annulent et donc $\deg P \leq n-1$. On regarde donc maintenant les termes devant X^{n-1} et on obtient $P = \binom{n}{n-1} X^{n-1} - \binom{n}{n-1}(-1)^1 X^{n-1} + T = 2nX^{n-1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $2n \neq 0$, on vient de démontrer que $\boxed{\deg P = n-1 \text{ et son coefficient dominant est } 2n}$.

3. Par propriété sur le degré d'une composée, on sait que $\deg P^2 = 2n$ et par propriété sur le degré d'une somme, on a : $\deg(P+1) \leq n$. Comme $2n \neq n$ car $n \in \mathbb{N}^\star$, par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de degré différents, on obtient que : $\boxed{\deg(P^2+P+1) = 2n}$. Et si a_n est le coefficient dominant de P, alors $\boxed{a_n^2 \text{ est le coefficient dominant de } P^2+P+1}$ car a_n^2 est le coefficient dominant de P^2.
4. Par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on sait que $\deg P(X+1) = \deg P$. Puis par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on obtient que : $\deg Q \leq \deg P$. Étudions les termes en X^n pour savoir s'ils s'annulent ou pas. On a : $P = a_n X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, on obtient que : $Q = a_n(X+1)^n + T(X+1) - a_n X^n - T = a_n X^n - a_n X^n + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ en utilisant le binôme de Newton afin de développer le terme en $(X+1)^n$. Ainsi, on obtient que $Q = R$ et ainsi $\deg Q \leq n-1$. Il faut donc alors regarder les termes en X^{n-1}. Toujours en utilisant le binôme de Newton et le fait que $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, on obtient que : $Q = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + T(X+1) - a_n X^n - a_{n-1}X^{n-1} - T = a_n\binom{n}{n-1}X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + T(X+1) - a_{n-1}X^{n-1} - T = na_nX^{n-1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on a que : $\boxed{na_n \neq 0 \text{ et ainsi } \deg Q = n-1 \text{ de coefficient dominant } na_n}$.
5. Par propriété sur le degré d'une dérivée, on sait que : $\deg P^{(k)} = \deg P - k$ si $k \leq \deg P$ ce qui est le cas car la somme va de $k=0$ à $k = n = \deg P$. Ainsi, on doit trouver le degré d'une somme de polynômes de degré tous différents, et par propriété, on sait alors que le degré correspond au maximum et ainsi on a : $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\right) = \deg P^{(0)} = \deg P = n$. Et le coefficient dominant correspond donc au coefficient dominant de $P^{(0)} = P$, à savoir a_n.

Exercice 7. Soient les polynômes $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par

$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
3. Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Correction 7.

1. Les calculs donnent : $P_2 = XP(Q) + 2Q \times P = X^7 - 5X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X$.
2. On a donc $\deg P_2 = 7$ et en utilisant les propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée de polynômes, on obtient : $\deg P_3 = 22$.
3.
   - Comme on n'arrive pas à conjecturer directement l'expression du degré de P_n, on va obtenir une relation de récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. On note $d_n = \deg P_n$. On sait que : $P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n$. Par propriété sur le degré d'un produit de polynômes, on sait que : $\deg QP_n = 3 + d_n$. De même, par propriété sur le degré d'une composée et d'un produit de polynômes, on obtient que : $\deg XP_n(Q) = 3d_n + 1$. Comme $3d_n + 1 > 3 + d_n$ dès que $d_n > 1$ ce qui est toujours le cas (car les degrés sont de plus en plus grands et le degré de P_1 est 2), on a par propriété sur le degré d'une somme de polynômes dont les degrés sont différents : $\deg P_{n+1} = 3d_n + 1$, à savoir : $d_{n+1} = 3d_n + 1$.
   - On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique de premier terme $d_1 = 2$ et dont la relation de récurrence est : $d_{n+1} = 3d_n + 1$. Les calculs donnent que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{d_n = 7 \times 3^{n-1} - \frac{1}{2}}$.

4. Les calculs faits pour P_2 et P_3 permettent de conjecturer que le coefficient dominant est 1. On le montre par récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. A faire.

Exercice 8. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   (a) Donner les valeurs de a_0, a_1, a_2 et a_3.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
   En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis le degré du polynôme P_n.

Correction 8.

1. On obtient $P_2 = \frac{3}{4}X^2 + 1$ et $P_3 = \frac{1}{2}X^3 + 2X$.
2. Montrons par recurrence double la propriété $H_n : \deg(P_n) \leq n$.
   - Initialisation : On a $\deg(P_0) = 0 \leq 0$ et et $\deg(P_1) = 1 \leq 1$, donc H_0 et H_1 sont vraies.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose H_n et H_{n+1} vraies, montrons que H_{n+2} est vraie.
   D'après H_n et H_{n+1}, et peut écrire $P_n = a_nX^n + R$ et $P_{n+1} = a_{n+1}X^{n+1} + S$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc on obtient, par définition de la suite :
   $$\begin{aligned} P_{n+2} &= X(a_{n+1}X^{n+1} + S) + \left(1 - \frac{X^2}{4}(a_nX^n + R\right) \\ &= \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{4}\right) X^{n+2} + XS + a_nX^n - \frac{X^2R}{2}. \end{aligned}$$
   Or par somme et produit de polynômes, on a $\deg(XS) \leq 1+n = n+1$, $\deg(a_nX^n) = n$ et $\deg(X^2R) \leq 2 + n - 1 = n + 1$. Donc finalement le degré de P_{n+2} est inférieur ou égal à $n + 2$, et le coefficient de X^{n+2} vaut $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$ (ce coefficient pourrait s'annuler).

   Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{\deg(P_n) \leq n}$.

3. (a) D'après les calculs précédents, on a $\boxed{a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{2}}$.
   (b) D'après la question 2), on a bien $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$.
   On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double. On calcule alors son terme général grâce à la méthode vue en cours, et on obtient $\boxed{a_n = (1+n)\frac{1}{2^n}}$. On en déduit que le coefficient d'indice n est non nul, donc $\boxed{P_n \text{ est bien de degré } n}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Exprimer de deux façons différentes le coefficient de X^n dans le polynôme : $P = (1 + X)^n(1 + X)^n$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Correction 9.

1. - On peut par exemple remarquer que $P = (X + 1)^{2n}$ et on peut alors utiliser le binôme de Newton qui nous donne : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$. Ainsi le coefficient devant X^n vaut $\binom{2n}{n}$.

- Mais on peut aussi voir P comme le produit $(X+1)^n \times (X+1)^n$ et en utilisant encore le binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j \\ &= \left(\binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 + \ldots + \binom{n}{n} X^n \right) \times \left(\binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 + \ldots + \binom{n}{n} X^n \right). \end{aligned}$$

  On cherche alors à développer ces deux sommes et à regarder quels sont les termes qui vont faire apparaître du X^n : le X^0 de la première somme doit être multiplié avec du X^n de la deuxième somme, le X de la première somme avec du X^{n-1} de la deuxième somme, ..., le X^{n-1} de la première somme avec le X de la deuxième somme et enfin le X^n de la première somme avec le X^0 de la deuxième somme. Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le X^k de la première somme doit être multiplié avec le X^{n-k} de la de la deuxième somme. Ainsi, cela nous donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ qui est le terme qui apparaît devant X^n.

  Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

2. Comme, par symétrie des coefficients binomiaux, on sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, la formule précédente devient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 10. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction tan est de la forme $P_n \circ \tan$ où P_n est un polynôme de degré $n+1$ dont on déterminera le coefficient dominant.

Correction 10. Étude de dérivées n-ième :

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonction C^∞. De plus, le calcul donne

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \qquad \text{et} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{\cos^3(x) + 2\sin^2(x)\cos(x)}{\cos^4(x)} = \frac{1+\sin^2(x)}{\cos^3(x)}$$

   en divisant tout par $\cos x$ qui pouvait être mis en facteur au numérateur et en utilisant le fait que : $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

2. - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \exists P_n \text{ polynôme tel que } \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   - Initialisation : pour $n = 0$:
     La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
     D'un côté, on a : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ et de l'autre côté, on a : $\dfrac{P_0(x)}{\cos x}$. Ainsi, si on pose $P_0 = 1$, ce polynôme convient et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que la fonction f est de classe C^n sur I et qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos(x))^{n+1}}.$$

     ⋆ Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur I comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

- ⋆ On dérive $f^{(n)}$ et on obtient pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(\sin x)\cos x \times \cos^{n+1} x - (n+1)P_n(\sin x)\cos^n(x)(-\sin x)}{\cos^{2n+2} x} \\
&= \frac{\cos^n x\left(P_n'(\sin x)\cos^2(x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x\right)}{\cos^{2n+2}(x)} \\
&= \frac{P_n'(\sin x)(1-\sin^2 x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x}{\cos^{n+2} x}.
\end{aligned}$$

  Ainsi, si on pose

$$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n,$$

  P_{n+1} est bien un polynôme comme somme de polynômes.
- ⋆ Cette fonction $f^{(n+1)}$ est bien continue sur I et donc f est bien de classe C^{n+1} sur I.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

3. Degré et coefficient dominant de P_n :
   - Le calcul des premiers polynômes de la suite donne : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2+1$, $P_3 = X^3 + 5X$.
   - Ainsi on peut conjecturer que $\deg P_n = n$ et $a_n = 1$ avec a_n coefficient dominant de P_n.
     - ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n,\ a_n = 1$.
     - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: on a vu que $P_0 = 1$ donc on a : $\deg P_0 = 0$ et $a_0 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
     - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose vraie la propriété à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $P_n = X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, on sait que $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$ donc on obtient que : $P_{n+1} = (1+X^2)(nX^{n-1} + T') + (n+1)X(X^n+T) = X^{n+1} + R$ avec $R = nX^{n-1} + (1-X^2)T' + (n+1)XT$. Et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ par propriété sur le degré d'une dérivée, d'un produit et d'une somme de polynômes. Ainsi on a bien que : $\deg P_{n+1} = n+1$ et $a_{n+1} = 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 1.

Exercice 11. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme

$$x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n esst un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Correction 11. 1. On sait donc que P est de degré 3 et que -1 est racine de P. Ainsi P est de la forme $P = (X+1)(aX^2+bX+c)$. Puis on utilise le fait que : $P(1) = 4$, $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$. Ces trois conditions permettent d'obtenir le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 2 \\ 4a-2b+c &= 5 \\ 4a+2b+c &= 5 \end{cases}$. La résolution donne : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On a donc ainsi entierement déterminé P : $P = (X+1)(X^2+1)$.

2. Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2+2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & -3 \\ bc & = & -2 \\ c^2 & = & 4 \end{array}\right.$. Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :

   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
   - si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
   - si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

   Ainsi il y a une deux solutions qui sont : $P = -X^2 - X + 2$ et $P = X^2 + X - 2$.

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$
   Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

Correction 12.

1. Voir la fiche sur les polynômes. Cela permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg P_n = n$ et son coefficient dominant est $(-2)^n$.
2. - Calcul de $P_2 = 4X^2 - 2$ et $P_3 = -8X^3 + 12X$.
   - On note par exemple b_n le coefficient constant du polynôme P_n. On peut conjecturer que $b_{2n+1} = 0$, par contre, on ne trouve pas de relation simple pour b_{2n}. On va donc faire une identification des coefficients constants dans la relation de récurrence afin de trouver une relation de récurrence entre b_{2n+2} et b_{2n}. On a : $P_{2n+2} = XQ_2 + b_{2n+2}$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $P_{2n+1} = XQ_1 + b_{2n+1}$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $P_{2n} = XQ + b_{2n}$ avec $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. En remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient : $XQ_2 + b_{2n+2} = -2X(XQ_1 + b_{2n+1}) - 2(2n+1)(XQ + b_{2n}) = XR - 2(2n+1)b_{2n}$ avec $R = -2X(XQ_1 + b_{2n+1}) - 2(2n+1)XQ$. Ainsi par unicité des coefficients d'un polynôme, on a : $b_{2n+2} = -2(2n+1)b_{2n}$.
   - Si on itère la relation de récurrence : $b_{2n+2} = -2(2n+1)b_{2n}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :
$$\begin{aligned} b_{2n} &= -2(2n-1)b_{2n-2} = (-2)^2(2n-1)(2n-3)b_{2n-4} = (-2)^3(2n-1)(2n-3)(2n-5)b_{2n-6} = \dots \\ &= (-2)^n(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots \times 3 \times 1 \times b_0. \end{aligned}$$
     On a ainsi conjecturer la valeur du terme constant. Avant de faire la récurrence permettant de démontrer cette relation, simplifions cette égalité :
$$\begin{aligned} b_{2n} &= (-1)^n 2^n \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times (2n-4) \dots 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times (2n-4) \dots 4 \times 2} \\ &= (-1)^n 2^n \frac{(2n)!}{2^n(n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1)} = \frac{(-1)^n \times (2n)!}{n!} \end{aligned}$$

- $\star$ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $b_{2n} = \dfrac{(-1)^n \times (2n)!}{n!}$ et $b_{2n+1} = 0$.
  $\star$ Initialisation : pour $n = 0$, on a d'un côté : $b_{2\times 0} = b_0 = 1$ car $P_0 = 1$ et de l'autre côté : $\dfrac{(-1)^0(0)!}{0!} = 1$. De plus, on a aussi d'un côté : $b_{2\times 0+1} = b_1 = 0$ car $P_1 = -2X$ et de l'autre côté : 0. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  $\star$ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on suppose donc que $b_{2n} = \dfrac{(-1)^n \times (2n)!}{n!}$ et $b_{2n+1} = 0$. On cherche à montrer que $b_{2n+2} = \dfrac{(-1)^{n+1} \times (2n+2)!}{(n+1)!}$ et $b_{2n+3} = 0$. D'après la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes, on a : $P_{2n+2} = -2XP_{2n+1} - 2(2n+1)P_{2n}$. On a : $P_{2n+2} = XQ_2 + b_{2n+2}$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $P_{2n+1} = XQ_1 + b_{2n+1}$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $P_{2n} = XQ + b_{2n}$ avec $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. En remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient : $XQ_2 + b_{2n+2} = -2X(XQ_1 + b_{2n+1}) - 2(2n+1)(XQ + b_{2n}) = XR - 2(2n+1)b_{2n}$ avec $R = -2X(XQ_1 + b_{2n+1}) - 2(2n+1)XQ$. Ainsi par unicité des coefficients d'un polynôme, on a : $b_{2n+2} = -2(2n+1)b_{2n} = -2(2n+1)\dfrac{(-1)^n \times (2n)!}{n!}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, on a : $b_{2n+2} = (-1)^{n+1}\dfrac{2 \times (2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)n!} = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)n!} = \dfrac{(-1)^{n+1} \times (2n+2)!}{(n+1)!}$. D'après la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes, on a aussi : $P_{2n+3} = -2XP_{2n+2} - 2(2n+2)P_{2n+1}$. On a : $P_{2n+3} = XQ_3 + b_{2n+3}$ avec $Q_3 \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$, $P_{2n+2} = XQ_2 + b_{2n+2}$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et $P_{2n+1} = XQ_1 + b_{2n+1}$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. En remplaçant dans la relation de récurrence, on obtient : $XQ_3 + b_{2n+3} = -2X(XQ_2 + b_{2n+2}) - 2(2n+2)(XQ_1 + b_{2n+1}) = XR - 2(2n+2)b_{2n+1}$ avec $R = -2X(XQ_2 + b_{2n+2}) - 2(2n+2)XQ_1$. Ainsi par unicité des coefficients d'un polynôme, on a : $b_{2n+3} = -2(n+1)b_{2n+1} = 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  $\star$ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{2n+1} = 0$ et $b_{2n} = \dfrac{(-1)^n \times (2n)!}{n!}$.

3. On peut remarquer sur P_0, P_2 et P_4 ne possèdent que des puissances paires et sont donc des fonctions paires tandis que P_1, P_3 ne possèdent que des puissances impaires et sont donc des fonctions impaires. On peut donc conjecturer que P_{2n} est une fonction paire tandis que P_{2n+1} est une fonction impaire.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: P_{2n} est une fonction paire et P_{2n+1} est une fonction in
   - Initialisation : pour $n = 0$: on sait que $P_0 = 1$ et donc P_0 est bien une fonction paire. De même, on sait que $P_1 = -2X$ et ainsi P_1 est bien une fonction impaire.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On commence par montrer que P_{2n+2} est bien une fonction paire : on sait que $P_{2n+2} = -2XP_{2n+1} - 2(2n+1)P_{2n}$. Comme par hypothèse de récurrence, on sait que P_{2n} est une fonction paire, P_{2n} n'a donc que des puissances paires. De même, comme par hypothèse de récurrence, on sait que P_{2n+1} est une fonction impaire, P_{2n+1} n'a donc que des puissances impaires et ainsi $-2XP_{2n+1}$ est un polynôme n'ayant que des puissances paires. Donc par somme P_{2n+2} n'a que des puissances paires et ainsi c'est une fonction paire. On montre alors que P_{2n+3} est bien une fonction impaire : on sait que $P_{2n+3} = -2XP_{2n+2} - 2(2n+2)P_{2n+1}$. Comme par hypothèse de récurrence, on sait que P_{2n+1} est une fonction impaire, P_{2n+1} n'a donc que des puissances impaires. De plus, on vient de montrer que P_{2n+2} est une fonction paire, P_{2n+2} n'a donc que des puissances paires et ainsi $-2XP_{2n+2}$ est un polynôme n'ayant que des puissances impaires. Donc par somme P_{2n+3} n'a que des puissances impaires et ainsi c'est une fonction impaire. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{2n} est une fonction paire et P_{2n+1} est une fonction impaire.

Exercice 13. Soit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x réel par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence que la dérivée n-ième est de la forme
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}$$
où P_n est un polynôme.
Donner une relation (R) entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Montrer que P_n est une fonction paire si n est un entier pair et une fonction impaire si n est un entier impaire.
4. Montrer par récurrence en utilisant la relation (R) que
$$P_n' = n^2 P_{n-1}.$$
5. En déduire que les polynômes P_n vérifient pour tout entier $n \geq 1$ la relation de récurrence suivante
$$P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}.$$

Correction 13. ....

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée n-ième du polynôme suivant :
$$P = X^2(1+X)^n.$$

Correction 14. Calculons la dérivée n-ième du polynôme suivant : $P = X^2(1+X)^n$.

- Le polynôme P s'écrit comme le produit de deux polynômes : $P = QR$ avec $Q = X^2$ et $R = (1+X)^n$. Pour calculer la dérivée n-ième de ce polynôme, on va donc utiliser la formule de Leibniz. On a alors : $P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q^{(k)} R^{(n-k)}$.
- Calcul de $Q^{(k)}$: comme Q est un polynôme de degré 2, on a : si $k > 2$ alors $Q^{(k)} = 0$. Sinon : $Q^{(0)} = Q$, $Q' = 2X$ et $Q^{(2)} = 2$.
- Calcul de $R^{(n-k)}$: On a : $R^{(n-k)} = \dfrac{n!}{k!}(1+X)^k$ si $k \geq 0$ ce qui est toujours le cas car dans la formule de Leibniz on somme pour k allant de 0 à n.
- On obtient : $P^{(n)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} Q^{(k)} R^{(n-k)} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} Q^{(k)} R^{(n-k)}$ par Chasles. Puis :
$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} Q^{(k)} R^{(n-k)} = QR^{(n)} + nQ'R^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} Q^{(2)} R^{(n-2)} \\ &= n!X^2 + 2nn!X(1+X) + n!\frac{n(n+1)}{2}(1+X)^2. \end{aligned}$$

Exercice 15. Soit n un entier non nul. On note alors P le polynôme : $P = X^n(1-X)^n$.

1. Calculer $P^{(n)}$.
2. En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 = \dfrac{2^n}{n!} P^{(n)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que : $P = \left(\dfrac{1}{4} - \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2\right)^n$.
4. En déduire une expression de P comme combinaison linéaire des polynômes
$$1, \left(X-\frac{1}{2}\right), \left(X-\frac{1}{2}\right)^2, \left(X-\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$
5. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 16. Soit le polynôme $P = X^5 - X^4 + 3X^2 + X - 5$.
Déterminer les coefficients du polynôme $P(X+1)$ avec un minimum de calcul.

Correction 15. Voir ? ?

III Racines d'un polynôme

Exercice 17. Trouver toutes les racines de $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Correction 16. On peut remarquer que i est racine de P et comme $P \in \mathbb{R}$, on sait donc que $-i$ aussi est racine de P. On peut tout de suite remarquer que i n'est pas racine de P' et donc i et $-i$ sont racines simples de P. On peut aussi remarquer que 2 est racine de P et que $P'(2) \neq 0$. Ainsi 2 est aussi racine simple de P. Ainsi on peut factoriser P par $(X+i)(X-i)(X-2) = (X^2+1)(X-2)$. L'identification des polynômes donne que 3 est racine de P et que P se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme : $\boxed{P = (X-i)(X+i)(X-2)(X-3)}$. On est sûr d'avoir bien trouvé toutes les racines car on a 4 racines et P est un polynôme de degré 4.

Remarque : on peut également trouver la dernière racine en utilisant : $i \times (-i) \times 2 \times x_4 = (-1)^4 \frac{6}{1}$, donc $x_4 = 3$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $B = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2$.

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines de ces deux polynômes.

Correction 17.

1. (a) Dans l'exercice ? ? ? on a déjà montré que : $\deg A = n - 1$.
   (b) On a : $B = P^2$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$. On a donc : $\deg B = 2 \deg P$. De plus, $\deg P = n$ donc $\deg B = 2n$.
2. (a) L'idée ici est de se ramener à la résolution d'une équation type racine n-ième de l'unité. On a déjà par définition d'une racine d'un polynôme que : z est racine de A si et seulement si $A(z) = 0$ si et seulement si $(z+1)^n = (z-1)^n$.
   - Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
   $$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$
   en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$.
   - Résolution des racines n-ièmes de l'unité (à savoir faire, cours) : on obtient après calculs que les solutions sont les Z de la forme $Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$.
   - On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors
   $$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).$$
   Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
   $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$
   avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.
     - ⋆ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
     - ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient
     $$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
     en utilisant la méthode de l'angle moitié.

- Les racines de A sont donc $z = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On les bien toutes trouvées puisque l'on en a $n-1$ et que le polynôme est de degré $n-1$.

(b) On a : z est racine de B si et seulement si $B(z) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$. Or on reconnaît une somme géométrique et ainsi, on a si $z \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. On remarque aussi que 1 n'est pas racine car $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \neq 0$. Donc on peut bien supposer $z \neq 1$. Ainsi, on a : z est racine de B si et seulement si : $\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z^{n+1} = 1$. On reconnaît la résolution des racines $n+1$-ième de l'unité. Les calculs donnent : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Mais comme $z \neq 1$, on doit enlever le cas $k = 0$ qui donne 1. Ainsi les racines de B sont les complexes de la forme : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![1, n]\!]$. Et on a bien trouvé toutes les racines puisque l'on en a n et que le degré de P est n.

Exercice 19. Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Correction 18. On regarde si a est racine de P et ainsi a est au moins racine simple. Puis on regarde jusqu'à quelle dérivée de P, a est-elle encore racine, ce qui donne l'ordre de multiplicité de la racine a.

1. Les calculs donnent que : $P(2) = 0 = P'(2) = P^{(2)}(2)$ et $P^{(3)}(2) \neq 0$. Ainsi 2 est racine triple de P.
2. Les calculs donnent que : $P(1) = 0 = P'(1) = P^{(2)}(1)$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine triple de P.

Exercice 20. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Correction 19. Pour que -1 soit racine au moins double de P, on doit avoir : $P(-1) = 0 = P'(-1)$. Les calculs donnent que : $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ donc -1 est racine au moins simple de P sans condition sur a. On a de plus : $P' = 5X^4 - 2aX - a$. Ainsi, on obtient : $P'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = -5$.
Donc $\boxed{-1 \text{ racine au moins double de } P \text{ si et seulement si } a = -5}$.

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et les polynômes

$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} \text{ et } Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\dots(X+1)}{n!}.$$

1. Calculer les degrés de P et de Q ainsi que $P(0)$ et $Q(0)$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $Q(i) = \binom{n+i}{i}$.
3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(i) = \sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k}$.
4. En déduire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $Q(i) = P(i)$
5. En déduire que $P = Q$.

Correction 20. 1. • On a : $P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}$ en faisant le changement de variable $j = k-1$. Ainsi, on a, en utilisant la relation de Chasles : $P_n - P_n' = P_n - P_{n-1} = \frac{X^n}{n!}$.

- On suppose par l'absurde que P_n admet une racine multiple que l'on note α. Ainsi α est au moins racine double et ainsi on doit avoir à la fois $P_n(\alpha) = 0$ et $P_n'(\alpha) = 0$. Ainsi, on a en particulier que : $P_n(\alpha) - P_n'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. Ainsi, si α est racine multiple de P_n alors forcément $\alpha = 0$. Or on remarque que : $P_n(0) = 1 \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas racine de P_n. Contradiction. Donc P_n n'admet pas de racine multiple.

2. A NE PAS FAIRE.
3. On a déjà montré que : $P_n' = P_{n-1}$.
4. - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: P_{2n} est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et P_{2n+} s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $\alpha_n < 0$ en étant négative avant et positive après.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
     - ⋆ $P_0 = 1$ et donc P_0 est bien strictement positive sur $\mathbb{R}$.
     - ⋆ $P_1 = X + 1$ et donc P_1 s'annule en $\alpha_1 = -1 < 0$ et P_1 est bien négative avant et positive après.

     Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$.
     - ⋆ Étude de P_{2n+2} : on sait que $P_{2n+2}' = P_{2n+1}$ et on connaît par hypothèse de récurrence le signe de P_{2n+1}. On obtient ainsi le tableau de variation de P_{2n+2} suivant :

       $$xP_{2n+1}P_{2n+2}-\infty\alpha_n+\infty-++\infty P_{2n+2}(\alpha_n)+\infty$$

       Les limites en $\pm\infty$ sont obtenues par le théorème du monôme de plus haut degré. De plus : $P_{2n+2}(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + P_{2n+1}(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}$ par hypothèse de récurrence. Et ainsi $P_{2n+2}(\alpha_n) > 0$ et comme $P_{2n+2}(\alpha_n)$ est le minimum global de P_{2n+2}, on a bien obtenu que P_{2n+2} est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
     - ⋆ Étude de P_{2n+3} : on sait que $P_{2n+3}' = P_{2n+2}$ et on vient de démontrer que P_{2n+2} reste toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi P_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a ainsi que P_{2n+3} est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, P_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en utilisant le théorème des monômes de plus haut degré, on sait aussi que : $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{2n+3}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{2n+3}(x) = +\infty$. Ainsi d'après le théroème de la bijection, on sait qu'il existe un unique α_{n+1} tel que $P_{2n+3}(\alpha_{n+1}) = 0$. Et P_{2n+3} est bien strictement négative avant et strictement positive après. De plus comme $P_{2n+3}(0) = 1$, en réappliquant le théorème de la bijection, on obtient que : $\alpha_{n+1} < 0$.

     Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

IV Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ et conséquences

Exercice 22. Montrer dans chacun des cas suivants que B divise A :

1. $A = X^9 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
2. $A = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.
3. $A = X^3 - iX^2 - X + i + 5$ et $B = X - 1 + i$.

Correction 21. Il y a trois méthodes principales : montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P \times B$ en factorisant, utiliser les identités remarquables, ou montrer que les racines de B sont bien racines de A.

1. On utilise l'identité remarquable : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ en prenant $a = X^3$ et $b = 1$. On obtient donc $A = X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1)$, donc B divise A.
   Autre méthode : les racines de B sont $1, j$ et j^2. Or on a $1^9 - 1 = 0$, $j^9 - 1 = (j^3)^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0$ et enfin $(j^2)^9 - 1 = (j^3)^6 - 1 = 1^6 - 1 = 0$, donc $1, j$ et j^2 sont bien des racines de A. Donc B divise A.

2. Montrons qu'il existe un polynôme P de degré 2 tel que $A = P \times B$. On cherche P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. On a alors $A = P \times B \Leftrightarrow 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6 = (aX^2 + bX + c)(X^2 - 3X + 1)$. Par identification des coefficients, on obtient alors $a = 2, b = 3$ et $c = 6$. Donc B divise bien A.
3. Il suffit de montrer que la seule racine de B, qui est $1 - i$, est aussi racine de A.

Exercice 23. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $B = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$?

Correction 22. Les racines de B sont j et j^2. Pour que B divise A, il suffit donc que j et j^2 soient racines de A, c'est-à-dire que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{rcl} j^4 + aj^2 + bj + c & = & 0 \\ j^8 + aj^4 + bj^2 + c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aj^2 + (b+1)j + c & = & 0 \\ aj + (b+1)j^2 + c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aj^2 + (b+1)j + c & = & 0 \\ a(j - j^2) + (b+1)(j^2 - j) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & -a(j^2 + j) = -a \\ b & = & a - 1 \end{array}\right.$$

On en déduit que les polynômes A doivent être de la forme $A = X^4 + aX^2 + (a-1)X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. On considère le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1$.

1. Trouver une racine évidente de P. Montrer que j est racine de P.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Correction 23.

1.
   - Rappels des propriétés de j à connaître : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \overline{j}$.
   - On a : $P(j) = j^5 + 3j^4 + 5j^3 + 5j^2 + 3j + 1 = j^2 + 3j + 5 + 5j^2 + 3j + 1 = 6(j^2 + j + 1) = 0$. Ainsi j est bien racine de P.
2.
   - Comme $P \in \mathbb{R}$, on sait aussi que $\overline{j} = j^2$ est racine de P. Regardons la multiplicité de j et j^2. Ce sont déjà des racines au moins simples. De plus, on a : $P' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 10X + 3$. On a alors : $P'(j) = 5j + 12 + 15j^2 + 10j + 3 = 15(1 + j + j^2) = 0$. Donc j est au moins racine double de P et donc j^2 aussi. On remarque de plus que -1 est aussi racine évidente de P. Comme $\deg P = 5$ et que l'on a trouvé 5 racines comptées avec leur multiplicité, on sait qu'on les a toutes trouvées.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + 1)$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X + 1)(X^2 + X + 1)^2$ car $(X - j)(X - j^2) = (X^2 + X + 1)$.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + 1$
2. $P = (X + i)^n - (X - i)^n$
3. $P = X^6 - 1$
4. $P = X^8 + X^4 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 - 8$
6. $P = X^n - 1$
7. $P = X^4 + 4$
8. $P = X^5 + 32$
9. $P = (2X - 1)^n - (-2X + 3)^n$
10. $P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i + 1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Correction 24. On ne donne ici que des indications sur la méthode et le résultat final. On peut remarquer que pour passer de la factorisation dans $\mathbb{C}$ à la factorisation dans $\mathbb{R}$, on a toujours :

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2\mathfrak{Re}(z)X + |z|^2.$$

1.
   - Racines complexes de P : on calcule avec la méthode habituelle les racines troisièmes de $-1 = e^{i\pi}$. On obtient -1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3 racines simples.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})}$.

- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X+1)(X^2-X+1)}$.

2. - Racines complexes de P. On résout l'équation $P(z)=0$:
   - ⋆ Comme i n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq i$. Ainsi, on peut diviser par $(z-i)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(z+i)^n=(z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1 \Leftrightarrow Z^n=1$$

en posant $Z=\dfrac{z+i}{z-i}$.

   - ⋆ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient (à détailler, voir cours) que les solutions sont les Z de la forme

$$Z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0,n-1]\!].$$

   - ⋆ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{z+i}{z-i}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0,n-1]\!]$ fixé. On obtient alors

$$\frac{z+i}{z-i}=e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+i=e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \Leftrightarrow z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=-ie^{\frac{2ik\pi}{n}}-i \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)=i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right).$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1=0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}}=1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n}=2k'\pi \Leftrightarrow k=nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0,n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k=0$.

     - ⋆ Pour $k=0$, on obtient : $0=2i$ donc il n'y a pas de solution pour $k=0$.
     - ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on sait que $1-e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient, en utilisant la méthode de l'angle moitié :

$$z=\frac{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}=\frac{2i\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}=\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

   - ⋆ Les racines de A sont donc $z=\cot\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1,n-1]\!]$.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: avant de factoriser, on doit trouver le coefficient dominant du polynôme. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton, et on sort les termes en X^n (qui se simplifient) et en X^{n-1} :

$$\begin{aligned} P=(X+i)^n-(X-i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k i^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-i)^{n-k} \\ &= X^n+niX^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k i^{n-k}-\left(X^n-niX^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k(-i)^{n-k}\right) \\ &= 2niX^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k\left(i^{n-k}-(-i)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme est de degré $n-1$ (ce qui est cohérent puisqu'on a trouvé $n-1$ racines complexes), et son coefficient dominant est $2ni$. On peut donc factoriser : $\boxed{P=2ni\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$.

3. • Racines complexes de P : Racines 6-ièmes de l'unité : -1, 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$: 6 racines simples pour un polynôme de degré 6.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-1)(X+1)(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})}$.
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X+1)(X-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$ car $(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})=X^2-X+1$ et $(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})=X^2+X+1$.
4. • Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P=Q(X^4)$ avec $Q=Y^2+Y+1$. Les racines de Q sont $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^4)=0\Leftrightarrow z^4=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il faut donc calculer les racines quatrièmes des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On obtient : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{12}}$, $e^{i\frac{14\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{20\pi}{12}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On a ainsi bien obtenu 8 racines simples distinctes.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$:
$$\boxed{P=(X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{7\pi}{6}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{11\pi}{6}})}.$$
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: on regroupe ensemble les racines conjuguées et on obtient :
$$\boxed{P=(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\left(X^2+X+1\right)}.$$
5. • Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P=Q(X^2)$ avec $Q=Y^2-2Y-8$. Les racines de Q sont -2 et 4. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^2)=0\Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=4$. Il faut donc calculer les racines seconde des nombres $-2=2e^{i\pi}$ et 4. On obtient : -2, 2, $-\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}i$.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-2)(X+2)(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)}$.
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X-2)(X+2)(X^2+2)}$.
6. • Racines complexes de P : Racines n-ièmes de l'unité. On obtient $z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0,n-1]\!]$.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$.
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: A ne pas faire.
7. • Racines complexes de P : Racines quatrièmes de -4 : $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}$: 4 racines simples pour un polynôme de degré 4.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}})}$.
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)}$.
8. • Racines complexes de P : Racines cinquièmes du nombre $-32=32e^{i\pi}$. Les racines sont : -2, $2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{5}}$: 5 racines simples pour un polynôme de degré 5.
   • Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X+2)(X-2e^{i\frac{\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{3\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{7\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{9\pi}{5}})}$.
   • Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X+2)\left(X^2-4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X+4\right)\left(X^2-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X+4\right)}$.
9. • Racines complexes de P : z est racine de P si et seulement si $(2z-1)^n=(-2z+3)^n$. Le but est alors de se ramener à la résolution des racines n-ième de l'unité.
   ⋆ Comme $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z\neq\frac{3}{2}$. Ainsi, on peut bien diviser par $(-2z+3)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
$$(2z-1)^n=(-2z+3)^n\Leftrightarrow\left(\frac{2z-1}{-2z+3}\right)^n=1\Leftrightarrow Z^n=1$$
   en posant $Z=\frac{2z-1}{-2z+3}$.

* $\star$ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient que les solutions sont les Z de la forme
$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$
* $\star$ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors
$$\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow 2z - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(-2z+3) \Leftrightarrow 2z\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1.$$
Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi \Leftrightarrow k = \frac{n}{2} + nk'$$
avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui pourrait vérifier cela est $k = \dfrac{n}{2}$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que n est pair ou impair :
  * $\circ$ Si n est pair alors $\dfrac{n}{2}$ est bien un nombre entier et on doit donc prendre $k \neq \dfrac{n}{2}$ si on veut diviser.
  * $\circ$ Si n est impair alors $\dfrac{n}{2}$ n'est pas un nombre entier et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a bien $e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 \neq 0$.

  On peut alors finir la résolution :
  * $\circ$ Pour n pair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \dfrac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1)} = \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \neq \dfrac{n}{2}$. On obtient ainsi $n-1$ racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré $n-1$ quand n est pair car le terme en X^n s'annule.
  * $\circ$ Pour n impair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \dfrac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1)} = \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On obtient ainsi n racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré n quand n est impair car le terme en X^n ne s'annule pas.

* Factorisation dans $\mathbb{C}$: Il faut connaître le coefficient dominant. On utilise pour cela le binôme de Newton et on regarde le terme en X^n pour n impair et le terme en X^{n-1} pour n pair. On a : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^kX^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{n-k}(-2)^kX^k$. Ainsi le terme en X^n est $2^n - (-2)^n$ qui s'annule bien quand n est pair et qui vaut 2^{n+1} si n est impair. Et le terme en X^{n-1} vaut lorsque n est pair à savoir $n-1$ impair : $-n2^{n-1} - 3n(-2)^{n-1} = n2^n$.
  * $\star$ Cas 1 : n pair :

    On obtient : $\boxed{P = n2^n \prod\limits_{k=0,\ k\neq\frac{n}{2}}^{n} \left(X - \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.
  * $\star$ Cas 2 : n impair :

    On obtient : $\boxed{P = 2^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(X - \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.
* Factorisation dans $\mathbb{R}$: à ne pas faire.

10. • Racines complexes de P : On sait que $1+i$ est racine complexe de P. Comme $P \in \mathbb{R}$, on a donc aussi que $1-i$ est racine complexe de P. Ainsi $P = (X-(1+i))(X-(1-i))Q = (X^2 - 2X + 2)Q$ avec Q polynôme de degré 2. En cherchant Q sous la forme $Q = aX^2 + bX + c$ et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient : $Q = X^2 + 5X - 6$. Le discriminant vaut $\Delta = 7$ et les racines sont 1 et -6. Ainsi on a trouvé 4 racines pour un polynôme de degré 4, on les a toutes.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-1)(X+6)(X-(1+i))(X-(1-i))$.
- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X-1)(X+6)(X^2-2X+2)$.

Exercice 26. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + 1$.

1. Trouver a et b de telle sorte que $1-i$ soit racine de P.
2. Dans ce cas, trouver toutes les autres racines complexes de P.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Correction 25.

1. On cherche donc a et b tels que $P(1-i) = 0$. On doit donc trouver a et b tels que : $(1-i)^4 + a(1-i)^2 + b(1-i) + 1 = 0$. On développe et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire qui doivent donc être toutes les deux nulles. On obtient que $b = 3$ et $a = -\frac{3}{2}$. Ainsi $P = X^4 - \frac{3}{2}X + 3X + 1$.
2. Comme $P \in \mathbb{R}$ et que $1-i$ est racine de P, on sait aussi que $1+i$ est racine de P et ainsi P se factorise sous la forme : $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(aX^2+bX+c) = (X^2-2X+2)(aX^2+bX+c)$. On développe et on identifie et on obtient : $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(X^2+2X+\frac{1}{2})$. Le discriminant de $X^2+2X+\frac{1}{2}$ vaut : $\Delta = 2$ et les deux racines sont $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(X-(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}))(X+1+\frac{1}{\sqrt{2}})$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X^2-2X+2)(X-(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}))(X+1+\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 27. Soient trois scalaires $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u+v+w = -a \qquad uv+vw+uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Correction 26. Idée : relation coefficients-racines :
On sait que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ et on sait aussi que u, v et w sont les racines complexes de P ainsi P se factorise sous la forme : $P = (X-u)(X-v)(X-w)$. Il s'agit alors de développer le produit $(X-u)(X-v)(X-w)$ et d'utiliser ensuite l'unicité des coefficients d'un polynôme. On obtient : $(X-u)(X-v)(X-w) = X^3 - (u+v+w)X^2 + (uv+uw+vw)X - uvw$. Ainsi par identification, on a :

$$u+v+w = -a \qquad uv+uw+vw = b \qquad uvw = -c.$$

Exercice 28. Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce : on considère la suite de polynômes

$$\begin{cases} P_1 = 1, \ P_2 = 2X \\ \forall n \geq 1, \ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_3 et P_4.
2. Soit $\theta \in]0,\pi[$ et $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.
   (b) Déterminer les solutions de l'équation $\sin(nx) = 0$ sur $]0,\pi[$.
   (c) En déduire les racines de P_n sur $]-1,1[$. Justifier que les $n-1$ racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.
3. Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.
4. (a) Pour tout $n \geq 1$, donner la décomposition du polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) En déduire que pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

5. Soit $n \geq 1$. Dériver deux fois par rapport à θ la relation obtenue au 2a et en déduire que

$$(1-X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2-1)P_n = 0.$$

Correction 27.

1. On a : $P_3 = 2XP_2 - P_1$, soit $\boxed{P_3 = 4X^2 - 1}$ et $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^2-1) - 2X$, soit $\boxed{P_4 = 8X^3 - 4X}$.
2. **Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geq 1$.**
   (a) **Montrer que $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.**
   Montrons par double récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété H_n : $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.

   - Initialisation : on a d'une part $P_1(\cos\theta)\sin\theta = 1 \times \sin\theta = \sin\theta$, et d'autre part $\sin(1\times\theta) = \sin\theta$, donc on a H_1 vraie. De même, on a d'une part $P_2(\cos\theta)\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$, et d'autre part $\sin(2\times\theta) = \sin(2\theta)$, donc on a H_2 vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie. On a, par définition de la suite (P_n) :

   $$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos\theta)\sin\theta &= (2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta))\sin\theta \\ &= 2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta - P_n(\cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos\theta\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta) && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= \sin(\theta+(n+1)\theta) - \sin(\theta-(n+1)\theta) - \sin(n\theta) && \text{(formule de trigonométrie)} \\ &= \sin((n+2)\theta). \end{aligned}$$

   On a donc H_{n+2} vraie.

   Par principe de récurrence, la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)}$.

   (b) **Déterminer les solutions de l'équation $\sin(nx) = 0$ sur $]0, \pi[$.**
   On a : $\sin(nx) = 0 \;\Leftrightarrow\; nx = k\pi \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $\dfrac{k\pi}{n} \in]0, \pi[\;\Leftrightarrow\; k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Les solutions dans $]0, \pi[$ sont donc : $\boxed{\left\{\dfrac{k\pi}{n}, k \in [\![1, n-1]\!]\right\}}$.

   (c) **En déduire les racines de P_n sur $]-1, 1[$. Justifier que les $n-1$ racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.**
   On cherche à résoudre $P_n(x) = 0$ pour $x \in]-1, 1[$. Or pour tout $x \in]-1, 1[$, il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. On est donc ramené à résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation $P_n(\cos\theta) = 0$. Or on a montré que $\sin(n\theta) = P_n(\cos\theta)\sin\theta$, donc comme $\sin\theta \neq 0$ sur $]0, \pi[$, on a $\sin(n\theta) = 0 \;\Leftrightarrow\; P_n(\cos\theta) = 0$. On doit donc résoudre :

   $$\sin(n\theta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{n}, k \in [\![1, n-1]\!]$$

   d'après la question précédente. Or $\theta = \dfrac{k\pi}{n} \;\Leftrightarrow\; x = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$. On en déduit que les racines de P_n sur $]-1, 1[$ sont données par : $\boxed{\left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right), k \in [\![1, n-1]\!]\right\}}$.

   Ces $n-1$ racines sont bien distinctes 2 à 2 car les $\dfrac{k\pi}{n}$ sont des réels 2 à 2 distincts de $]0, \pi[$, et la fonction cosinus est strictement croissante sur cet intervalle.
3. **Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.**
   Montrons par double récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : H_n : P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant 2^{n-1}.

- Initialisation : on a $P_1 = 1$, qui est bien un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant $2^0 = 1$. De même, $P_2 = 2X$ est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant $2^1 = 2$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie. On a

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n,$$

donc P_{n+2} est un polynôme comme produit et somme de polynômes. De plus, par hypothèse de récurrence, il existe Q (respectivement R de degré inférieur ou égal à $n-1$ (respectivement $n-2$) tels que $P_{n+1} = 2^n X^n + Q$ et $P_n = 2^{n-1}X^{n-1} + R$. Donc on a

$$P_{n+2} = 2X(2^n X^n + Q) - 2^{n-1}X^{n-1} - R,$$

soit

$$P_{n+2} = 2^{n+1}X^{n+1} + S$$

avec $S = 2XQ - 2^{n-1}X^{n-1} - R$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc P_{n+2} est bien de degré $n+1$ et de coefficient dominant égal à 2^{n+1}, et H_{n+2} est démontrée.

Par principe de récurrence, la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } n-1 \text{ et de co}}$

4. (a) **Pour tout $n \geq 1$, donner la décomposition du polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$.**
D'après les questions précédentes, on sait que P_n est de degré $n-1$, et on a trouvé $n-1$ racines à la question 2). Ce sont donc les seules. Comme de plus le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}, on peut factoriser P_n de la façon suivante :

$$\boxed{P_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

(b) **En déduire que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.**

Comme $\theta \in]0, \pi[$, on a $\sin\theta \neq 0$, donc on a $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$. D'après la factorisation de P_n, on a donc bien :

$$\boxed{\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

5. **Soit $n \geq 1$. Dériver deux fois par rapport à θ la relation obtenue au 2a et en déduire que : $(1 - X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2 - 1)P_n = 0$.**
On sait que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a : $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$. Tous les membres de cette équation sont dérivables sur $]0, \pi[$ comme composées et sommes de fonctions dérivables. On peut donc dériver cette équation :

$$\begin{aligned} n\cos(n\theta) &= -\sin\theta P_n'(\cos\theta)\sin\theta + P_n(\cos\theta)\cos\theta \\ &= -\sin^2(\theta)P_n'(\cos\theta) + \cos\theta P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

On obtient à nouveau des expressions dérivables comme composées et sommes de fonctions dérivables, donc on dérive à nouveau :

$$\begin{aligned} -n^2\sin(n\theta) &= P_n''(\cos\theta)\sin^3(\theta) - 2\cos\theta\sin\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta P_n(\cos\theta) \\ &= P_n''(\cos\theta)\sin^3(\theta) - 3\cos\theta\sin\theta P_n'(\cos\theta) - \sin\theta P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

Or on a $\sin\theta \neq 0$ sur $]0, \pi[$, donc on peut diviser l'équation précédente par $\sin\theta$:

$$P_n''(\cos\theta)\sin^2(\theta) - 3\cos\theta P_n'(\cos\theta) - P_n(\cos\theta) + n^2\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 0.$$

De plus, on a $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, et on a montré que $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = P_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$, donc on a :

$$P_n''(\cos\theta)(1 - \cos^2(\theta)) - 3\cos\theta P_n'(\cos\theta) + (n^2 - 1)P_n(\cos\theta) = 0.$$

En posant $x = \cos\theta$, on a donc montré que pour tout $x \in] - 1, 1[$, on a :

$$P_n''(x)(1 - x^2) - 3xP_n'(x) + (n^2 - 1)P_n(x) = 0.$$

Le polynôme $(1 - X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2 - 1)P_n$ admet donc une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul, et on a bien : $\boxed{(1 - X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2 - 1)P_n}$.

Exercice 29. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Correction 28.

1. On cherche les racines complexes, soi $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^n = 1 \Leftrightarrow z + 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}, \quad \text{avec } k \in [\![0, n - 1]\!].$$

On a utilisé en particulier l'expression des racines n-ièmes de l'unité et la méthode de l'angle moitié. Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on en déduit la factorisation suivante :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

2. ⋆ En prenant $k = 0$, on remarque que 0 est racine de P, et que P se factorise sous la forme

$$P = X\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = XQ,$$

et les racines de Q sont donc : $2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1, n - 1]\!]$.
On en déduit que le produit des racines de Q vaut :

$$\begin{aligned} B = \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}(1+\cdots+(n-1))} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}(i)^{n-1} \times A \;=\; 2^{n-1}(-1)^{n-1}A. \end{aligned}$$

⋆ De plus, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient que :

$$P = X^n + nX^{n-1} + \cdots + nX + 1 - 1 = X\left(X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n\right)$$

et ainsi $Q = X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n$.

⋆ Les relations coefficients-racines appliquées au polynôme Q donnent alors que :

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-1)^{n-1}\text{coeff constant de } Q}{\text{coeff dominant de } Q} \\ \Leftrightarrow & \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}n \\ \Leftrightarrow & \; 2^{n-1}(-1)^{n-1}A = (-1)^{n-1}n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $\boxed{A = \frac{n}{2^{n-1}}}$.

V Résolutions d'équations avec des polynômes

Exercice 30. Expression de sommes.

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que : $P - P(X+1) = X^3$.

   En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que : $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$

   En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression simple de $S = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Correction 29. 1. • On cherche donc P sous la forme $P = aX^4 + bX^3 + cX^3 + dX + e$ vérifiant : $P - P(X+1) = X^3$. On commence par calculer $P - P(X+1)$ et on obtient : $P - P(X+1) = -4aX^3 + (-6a-3b)X^2 + (-4a-3b-2c)X - a - b - c - d$. Comme on veut $P - P(X+1) = X^3$, par unicité des coeficients d'un polynôme, on obtient le système suivant à résoudre : $\begin{cases} -4a &= 1 \\ -6a-3b &= 0 \\ -4a-3b-2c &= 0 \\ -a-b-c-d &= 0 \end{cases}$ La résolution donne : $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{4}$ et $d = 0$. Il n'y a pas de condition sur e que l'on prend donc égal à 0. Ainsi, on a : $P = -\frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{4}X^2$.

• Comme l'égalité démontrée ci-dessus est une égalité entre deux polynômes, elle est en particulier vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, à savoir : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - P(x+1) = x^3$. En particulier elle est aussi vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, à savoir : $P(k) - P(k+1) = k^3$. Ainsi, on a : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} P(k) - P(k+1) = \sum_{k=0}^{n} P(k) - \sum_{k=0}^{n} P(k+1)$ par linéarité. On reconnaît alors une somme télescopique et on obtient : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} P(k) - \sum_{k=1}^{n+1} P(k) = P(0) - P(n+1)$. Mais on connaît aussi l'expression de P et ainsi, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2 - 2(n+1) + 1\right) = \frac{(n(n+1))^2}{4}$. On retrouve ainsi l'expression connue.

2. C'est exactement la même chose. A faire.

Exercice 31. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Correction 30.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$, on a alors que : $\varphi(P) = (3X+1)P - X(X+1)P'$. Comme P est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on sait que $P' \in \mathbb{R}$. De plus $3X+1$ et $X(X+1)$ sont aussi des polynômes et ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes. Donc si $P \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on cherche à savoir sous quelles conditions, on a aussi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il faut donc étudier le degré de $\varphi(P)$ sachant que $P = a_nX^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$. Par définition de $\varphi(P)$, on a : $\deg \varphi(P) \leq n+1$. En effet, par propriété sur le degré d'un produit, d'une dérivée et d'une somme de polynômes de même degré, on a : $\deg (3X+1)P = n+1$, $\deg X(X-1)P' = n+1$ et ainsi $\deg \varphi(P) \leq n+1$. On obtient que : $\varphi(P) = (3X+1)(a_nX^n + Q) - X(X-1)(na_nX^{n-1} + Q')$. Étudions le terme en X^{n+1} afin de voir sous quelle condition le coefficient devant ce terme s'annule. On a : $\varphi(P) = 3a_nX^{n+1} - na_nX^{n+1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour que $\deg \varphi(P) \leq n$, on doit donc avoir : $(3-n)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, cela impose que $n = 3$ et ainsi cela impose que le degré de P soit 3. Ainsi $\varphi\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 3$.
   (b) P est donc un polynôme de degré 3 et ainsi il est de la forme : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On cherche alors à résoudre $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow (3X+1)P - X(X-1)P' = 0$. Les calculs donnent : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = 0$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient : $a = b = c = d = 0$ et ainsi seul le polynôme nul convient.
3. Les deux questions précédentes ont permis de montrer que si $n \neq 3$ et $\deg P = n$ alors $\deg\left(\varphi(P)\right) = n+1$ et si $n = 3$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi pour que $\varphi(P) = X^2$, il faut soit que $\deg P = 1$, soit que $\deg P = 3$. On étudie ainsi chacun de ces cas :
   - Cas 1 : si $n = 1$: $P = aX + b$:
     On doit donc avoir : $(3X+1)(aX+b) - X(X-1)a = X^2$ et en développant le terme de gauche et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient le système linéaire suivant à résoudre : $\begin{cases} 2a & = 1 \\ 2a + 3b & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$. Ce système est incompatible et ainsi il n'existe aucun P de degré 1 vérifiant $\varphi(P) = X^2$.
   - Cas 2 : si $n = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$:
     En reprenant les mêmes calculs que dans la questions 2(a), on a : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = X^2$ et on doit donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} b + 4a & = 0 \\ 2c + 3b & = 1 \\ 3d + 2c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$. La résolution donne : $a = -\dfrac{1}{12}$, $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = d = 0$. Ainsi on obtient qu'il existe un seul polynôme P vérifiant $\varphi(P) = P^2$, le polynôme : $P = -\dfrac{1}{12}X^3 + -\dfrac{1}{3}X^2$.

Exercice 32. On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Correction 31.

1. On suppose que $P \in \mathbb{R}$ vérifie $P(X^2) = (1+X^2)P$. Condition sur le degré : Le polynôme nul convient bien. Sinon, si P est de degré n, alors on a : $\deg P(X^2) = 2n$ et $\deg\left((1+X^2)P\right) = 2+n$ par propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée. Ainsi, on doit avoir : $2n = n+2 \Leftrightarrow n = 2$. Ainsi P est un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.
2. Identification des coefficients : On a donc d'un côté : $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et de l'autre côté : $(1+X^2)P = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficents d'un polynôme, on obtient que : $\begin{cases} a &= a \\ b &= 0 \\ a+c &= b \\ c &= c \end{cases}$. Ainsi, on obtient que $b = 0$ et $a = -c$ et P est de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Synthèse : soit $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il vérifie bien $P(X^2) = (1+X^2)P$. Ainsi les polynômes vérifiant la relation sont exactement les polynômes de type $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. On cherche donc les deux racines de P : montrons que 1 et -1 conviennent. On a :
$$P(1^2) = (1^2+1)P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 2P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 0,$$
   donc 1 est bien racine de P. De même :
$$P((-1)^2) = ((-1)^2+1)P(-1) \;\Rightarrow\; P(1) = 2P(-1) \;\Rightarrow\; P(-1) = \frac{P(1)}{2} = 0,$$
   donc -1 est bien racine de P. On sait que P est de degré 2, donc on a trouvé toutes les racines, et P peut donc s'écrire $P = a(X-1)(X+1)$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$. On retrouve bien que les solutions sont les polynômes de la forme $\boxed{P = a(X^2-1), \text{ avec } a \in \mathbb{R}^\star}$.

Exercice 33.

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}$ tels que : $P = XP'$.
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}$ tels que : $(2X^2-3)P'' - 6P = 0$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\; P(n) = 0$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que : $P(X+1) = -P$.

Correction 32.

1.
   - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant : $P = XP'$. On remarque tout de suite que le polynôme nul convient et ainsi on peut prendre $P \in \mathbb{R}$ polynôme non nul vérifiant $P = XP'$. On pose ainsi $n = \deg P$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
     - ⋆ On peut commencer par regarder si l'équation vérifiée par P impose des conditions sur le degré de P. D'un côté, on a : $\deg P = n$ et de l'autre côté, on a par propriété sur le degré d'une dérivée et d'un produit de polynômes : $\deg XP' = 1 + (n-1) = n$. Donc l'équation n'impose aucune condition sur le degré de P.
     - ⋆ Identification des coefficients : en effet, on a d'un côté : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et de l'autre côté : $XP' = X\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$. Ainsi, on a l'égalité de polynômes suivante :
$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X3 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = a_1X + 2a_2X^2 + 3a_3X^3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}X^{n-1} + na_nX^n.$$
       Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $a_0 = 0$, $a_1 = a_1$, $a_2 = 2a_2 \Leftrightarrow a_2 = 0$, $a_3 = 3a_3 \Leftrightarrow a_3 = 0, \ldots, a_{n-1} = (n-1)a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = 0$ et $a_n = na_n \Leftrightarrow a_n = 0$. Ainsi P est de la forme : $P = a_1X$.

- Synthèse : soit P de la forme $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$ (le polynôme nul est ainsi pris en compte puisque a peut être nul). On a donc $XP' = X \times a = aX = P$. Donc $P = aX$ vérifie bien l'équation $P = XP'$. Ainsi l'ensemble des polynômes vérifiant $P = XP'$ sont les polynômes de la forme $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2.
   - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant : $(2X^2 - 3)P'' - 6P = 0$. On remarque tout de suite que le polynôme nul convient et ainsi on peut prendre $P \in \mathbb{R}$ polynôme non nul vérifiant $(2X^2 - 3)P'' = 6P$. On pose ainsi $n = \deg P$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.
     - ⋆ On peut commencer par regarder si l'équation vérifiée par P impose des conditions sur le degré de P. D'un côté, on a : $\deg 6P = n$ et de l'autre côté, on a par propriété sur le degré d'une dérivée et d'un produit de polynômes : $\deg (2X^2 - 3)P'' = 2 + (n - 2) = n$. Donc l'équation n'impose aucune condition sur le degré de P.
     - ⋆ On peut ensuite regarder ce que cette équation impose au niveau du coefficient de plus haut degré. On a : $P = a_n X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $P'' = n(n-1)a_n X^{n-2} + T''$ avec $T'' \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Ainsi, on a : $(2X^2 - 3)(n(n-1)a_n X^{n-2} + T'') = a_n X^n + T$. Et par unicicté des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $2n(n-1)a_n = 6a_n \Leftrightarrow (n^2 - n - 3)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, on doit avoir : $n^2 - n - 3 = 0$. Le discriminant vaut 13 et les racines ne sont donc pas entières. Ainsi, il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que : $2n(n-1)a_n = 6a_n$.

     Ainsi il n'existe aucun polynôme non nul vérifiant $(2X^2 - 3)P'' - 6P = 0$.
   - Synthèse : Seul le polynôme nul vérifie $(2X^2 - 3)P'' - 6P = 0$.
3.
   - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi P admet une infinité de racines car il admet tous les entiers naturels comme racines. Donc P est le polynôme nul.
   - Synthèse : Le polynôme nul vérifie bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n) = 0$. Donc le seul polynôme vérifiant cela est bien le polynôme nul.
4.
   - Analyse : soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X+1) = -P$. On peut tout de suite remarquer que le polynôme nul convient. Soit alors $P \in \mathbb{R}$ non nul et de degré n.
     - ⋆ Étude du degré : d'un côté, par propriété sur le degré d'une composée, on a : $\deg P(X+1) = \deg P$ et de l'autre côté, on a : $\deg P$. Ainsi l'équation vérifiée par P n'impose aucune condition sur le degré du polynôme.
     - ⋆ Étude des racines : on remarque que $P(1) = -P(0)$, puis : $P(2) = -P(1)$ donc $P(2) = P(0)$. De même : $P(3) = -P(2)$ donc $P(3) = P(1)$. Ainsi on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(2n) = P(0)$ et $P(2n+1) = P(1)$. On pose alors les polynômes : $Q = P - P(0)$ et $R = P - P(1)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Q(2n) = P(2n) - P(0) = 0$ et $R(2n+1) = P(2n+1) - P(1) = 0$. Ainsi tous les entiers naturels pairs sont racines de Q et tous les entiers naturels impairs sont racines de R. Ainsi Q et R possèdent tous les deux une infinité de racines et ils sont donc tous les deux nuls : $Q = 0 \Leftrightarrow P = P(0)$ et $R = 0 \Leftrightarrow P = P(1)$. Ainsi, on doit avoir : $P = P(0) = P(1)$. Mais comme de plus : $P(1) = -P(0)$, on doit avoir : $P = P(0) = -P(0)$ donc P est le polynôme nul.
   - Synthèse : Le polynôme nul vérifie bien $P(X+1) = -P$. Donc le seul polynôme vérifiant cela est bien le polynôme nul.

Exercice 34. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer $P_2,\ P_3$ et P_4. Déterminer également les racines de ces trois polynômes.
2. Déterminer pour tout $n \geq 0$ le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(1)$.
4. Soit $n \geq 0$.

(a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos t) = \cos(nt).$$

(b) Réciproquement, montrer que si Q_n est un polynôme tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos t) = \cos(nt)$$

alors $P_n = Q_n$.

5. Etudier la parité de P_n. On pourra s'intéresser au polynôme $Q = P_n(-X) - (-1)^n P_n$.
6. Soit $n \geq 0$.
   (a) Déterminer les racines de P_n sur $[-1, 1]$.
   (b) En déduire toutes les racines de P_n.

Correction 33. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
Dans cet exercice très classique, il y a deux idées importantes :

- Les polynômes étant définis par une relation de récurrence d'ordre deux, beaucoup de propriétés vont se démontrer par une récurrence double.
- L'idée selon laquelle deux polynômes sont égaux dès qu'ils sont égaux pour une infinité de valeurs ou ce qui revient au même : un polynôme est nul dès qu'il a une infinité de racines.

1. - Le calcul donne : $P_2 = 2X^2 - 1$ et les racines sont : $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   - Le calcul donne : $P_3 = 2^2X^3 - 3X$ et les racines sont : 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   - Le calcul donne : $P_4 = 2^3X^4 - 8X^2 + 1$.
2. On peut conjecturer que le degré de P_n est n et son coefficient dominant : 2^{n-1} pour $n \geq 1$.
   - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n$ et $a_n = 2^{n-1}$ avec a_n le coefficient dominant de P_n.
   - Initialisation : pour $n = 1$ et $n = 2$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_1 = X$ et les calculs ont donné $P_2 = 2X^2 - 1$. Ainsi on a bien $\deg P_1 = 1$ et $\deg P_2 = 2$. De plus on a : $a_1 = 1$ et $2^0 = 1$ et $a_2 = 2$ et $2^1 = 2$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que $P_n = 2^{n-1}X^n + T$ et $P_{n+1} = 2^nX^{n+1} + S$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient :

     $$P_{n+2} = 2X(2^nX^{n+1} + S) - 2^{n-1}X^n - T = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XS - 2^{n-1}X^n - T = 2^{n+1}X^{n+2} + R$$

     avec $R = 2XS - 2^{n-1}X^n - T \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ par propriétés sur le degré de produits et de sommes de polynômes. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}.
3. On remarque que $P_0(1) = P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1)$. Ainsi on peut conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$P_n(1) = 1$.
   - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $P_n(1) = 1$.
   - Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Ainsi on a bien $P_0(1) = 1$ et $P_1(1) = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que $P_n(1) = 1$ et $P_{n+1}(1) = 1$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient : $P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(1) = 1$.

4. (a)
   - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_0(\cos(t)) = 1$ et $P_1(\cos t) = \cos(t)$. Comme on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos(0 \times t) = \cos(0) = 1$ et $\cos(1 \times t) = \cos t$, on a bien $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vraies.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos t) = \cos(nt)$ et $P_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_{n+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)P_{n+1}(\cos(t)) - P_n(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$. On utilise alors le formulaire de trigonométrie qui donne que : $2\cos(t)\cos((n+1)t) = \cos((n+2)t) + \cos(nt)$. Ainsi on obtient bien que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_{n+2}(\cos(t)) = \cos((n+2)t)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_n(\cos t) = \cos(nt)$.

   (b) Soit Q_n qui vérifie la relation : $\forall t \in \mathbb{R},\ Q_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   - On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_{n+2}(\cos t) = \cos((n+2)t)$ par hypothèse. En utilisant alors la relation obtenue dans le raisonnement par récurrence fait ci-dessus, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos((n+2)t) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_n(\cos t) = 2\cos(t)Q_{n+1}(\cos t) - Q_n(\cos t)$ car par hypothèse, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $Q_n(\cos t) = \cos(nt)$.
     On obtient aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_0(\cos t) = \cos(0 \times t) = 1$ et $Q_1(\cos(t)) = \cos(1 \times t) = \cos(t)$.
   - La première chose à remarquer est que lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ tout entier, $\cos t$, lui, parcourt $[-1, 1]$ tout entier.
     * ⋆ Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_0(\cos t) = 1$, les deux polynômes Q_0 et 1 sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc $Q_0 = 1$.
     * ⋆ De même, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_1(\cos t) = \cos t$, les deux polynômes Q_0 et X sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc $Q_1 = X$.
     * ⋆ De même, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_{n+2}(\cos t) = 2\cos t Q_{n+1}(\cos t) - Q_n(\cos t)$, les deux polynômes Q_{n+2} et $2XQ_{n+1} - Q_n$ sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$.
   - On a ainsi montré que les polynômes Q_n sont aussi définis par : $\begin{cases} Q_0 = 1 \quad Q_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n. \end{cases}$.
     Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Q_n = P_n$.

   On a donc démontré que l'égalité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos t) = \cos(nt)$ détermine de façon unique les polynômes et est équivalente à la définition par récurrence de la suite de polynômes.

5. Maintenant on a deux définitions possibles pour la suite de polynômes P_n : soit celle par récurrence, soit celle avec le cosinus. Cela nous donne donc deux types de raisonnement possibles pour obtenir des propriétés sur P_n : soit par récurrence double, soit avec l'idée d'obtenir une infinité de racines : tout l'intervalle $[-1, 1]$.

- On commence par calculer $Q(\cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q(\cos(t)) = P_n(-\cos t) - (-1)^n P_n(\cos t) = P_n(\cos(t+\pi)) - (-1)^n \cos(nt)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie et la caractérisation de P_n avec le cosinus. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a aussi : $P_n(\cos(t+\pi)) = \cos(nt + n\pi) = (-1)^n \cos(nt)$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q(\cos t) = 0$.
- Ainsi on a montré que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $Q(x) = 0$. En effet, on sait que lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, $\cos t$ parcourt $[-1,1]$. Ou encore on sait que la fonction cosinus est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ ce qui assure que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe bien $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$. Si on veut l'unicité du t, il faut prendre $t \in [0,\pi]$ par exemple car la fonction cosinus est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. Comme pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $Q(x) = 0$, le polynôme Q a donc une infinité de racines et ainsi $Q = 0$.
- On vient donc de montrer que : $P_n(-X) = (-1)^n P_n$. Ainsi si n est pair, P_n est une fonction paire, tandis que si n est impair, P_n est une fonction impaire ($\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et les polynômes sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier).

6. (a) $x \in [-1,1]$ est racine de P_n si et seulement si $P_n(x) = 0$. Mais comme $x \in [-1,1]$, on sait qu'il existe un unique $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos t$. Ainsi on a : $x = \cos t \in [-1,1]$ est racine de P_n si et seulement si $P_n(x) = 0 = P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. On doit donc résoudre $\cos(nt) = 0$ avec $t \in [0,\pi]$. On obtient : $\cos(nt) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ nt = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. De plus, on veut, afin que toutes les racines soient bien distinctes, que $t \in [0,\pi]$. On doit donc résoudre : $0 \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$. Comme de plus k est un entier, on obtient que $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, on a obtenu que $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n toutes dans $[-1,1]$.

   (b) On vient de trouver n racines distinctes. Or on sait de plus que P_n est un polynôme de degré n, ainsi on les a toutes trouvées.

Exercice 35. Soit a un réel, n un entier naturel non nul et

$$Z = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{4ki\pi}{n}} - 2\cos(a)e^{\frac{2ki\pi}{n}} + 1\right).$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 - 2\cos(a)X + 1$.
2. En déduire une factorisation de Z.
3. Simplifier Z.

Correction 34.

1. Le discriminant vaut $\Delta = -4\sin^2(a)$. Ainsi $\sqrt{\Delta} = 2i|\sin a|$. Les racines sont alors après étude de cas pour enlever la valeur absolue : e^{ia} et e^{-ia}.
2. On remarque qu'en posant $X = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on a : $Z = \prod_{k=0}^{n}(X^2 - 2\cos aX + 1) = \prod_{k=0}^{n}(X - e^{ia})(X - e^{-ia}) = \prod_{k=0}^{n}(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{ia})(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{-ia})$.
3. On utilise alors la méthode de l'angle moitié afin de simplifier l'expression ci-dessus et on obtient :

$$Z = \prod_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}-\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}-\frac{ia}{2}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}} - e^{-(\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2})}\right) = \prod_{k=0}^{n} -4e^{\frac{i2k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{a}{2}\right)$$

Il s'agit alors de remarquer que : $\prod_{k=0}^{n} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}$. Ainsi, on obtient que :

$$Z = 4^n(-1)^n(-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{a}{2}\right) = -4^n\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{a}{2}\right).$$