TD 14 : Polynômes - version longue

I Opérations sur les polynômes

Exercice 1. On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X+1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Exercice 2. Développer le polynôme suivant : $Q = (X^3 + X^2 + X + 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k$.

Exercice 3. Simplifier le polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(1-X)^{3n-2k}X^k$.

Exercice 4. Calculer $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P = X^2 - 3X + 1$ et $Q = X^2 - 3X + 2$.

II Degré et coefficients

Exercice 5. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Exercice 6. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X+1)^n - (X-1)^n$
3. $P^2 - P + 1$
4. $Q = P(X+1) - P$
5. $\sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Exercice 7. Soient les polynômes $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par

$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
3. Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Exercice 8. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right)P_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.

(a) Donner les valeurs de $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis le degré du polynôme P_n.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Exprimer de deux façons différentes le coefficient de X^n dans le polynôme : $P = (1+X)^n(1+X)^n$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 10. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction tan est de la forme $P_n \circ \tan$ où P_n est un polynôme de degré $n+1$ dont on déterminera le coefficient dominant.

Exercice 11. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme

$$x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n esst un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$
Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

Exercice 13. Soit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x réel par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer par récurrence que la dérivée n-ième est de la forme
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\ \sqrt{1-x^2}}$$
où P_n est un polynôme.
Donner une relation (R) entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Montrer que P_n est une fonction paire si n est un entier pair et une fonction impaire si n est un entier impaire.
4. Montrer par récurrence en utilisant la relation (R) que
$$P_n' = n^2 P_{n-1}.$$
5. En déduire que les polynômes P_n vérifient pour tout entier $n \geq 1$ la relation de récurrence suivante
$$P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}.$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée n-ième du polynôme suivant :

$$P = X^2(1+X)^n.$$

Exercice 15. Soit n un entier non nul. On note alors P le polynôme : $P = X^n(1-X)^n$.

1. Calculer $P^{(n)}$.
2. En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}^2 = \dfrac{2^n}{n!}P^{(n)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que : $P = \left(\dfrac{1}{4} - \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2\right)^n$.
4. En déduire une expression de P comme combinaison linéaire des polynômes
$$1, \left(X-\frac{1}{2}\right), \left(X-\frac{1}{2}\right)^2, \left(X-\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$
5. En déduire la valeur de : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}^2$.

Exercice 16. Soit le polynôme $P = X^5 - X^4 + 3X^2 + X - 5$.
Déterminer les coefficients du polynôme $P(X+1)$ avec un minimum de calcul.

III Racines d'un polynôme

Exercice 17. Trouver toutes les racines de $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $B = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} X^k\right)^2$.

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines de ces deux polynômes.

Exercice 19. Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Exercice 20. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et les polynômes
$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} \text{ et } Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\dots(X+1)}{n!}.$$

1. Calculer les degrés de P et de Q ainsi que $P(0)$ et $Q(0)$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $Q(i) = \dbinom{n+i}{i}$.
3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $P(i) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{i+k-1}{k}$.
4. En déduire que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a : $Q(i) = P(i)$
5. En déduire que $P = Q$.

IV Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ et conséquences

Exercice 22. Montrer dans chacun des cas suivants que B divise A :

1. $A = X^9 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
2. $A = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.
3. $A = X^3 - iX^2 - X + i + 5$ et $B = X - 1 + i$.

Exercice 23. À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $B = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$?

Exercice 24. On considère le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1$.

1. Trouver une racine évidente de P. Montrer que j est racine de P.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + 1$
2. $P = (X+i)^n - (X-i)^n$
3. $P = X^6 - 1$
4. $P = X^8 + X^4 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 - 8$
6. $P = X^n - 1$
7. $P = X^4 + 4$
8. $P = X^5 + 32$
9. $P = (2X-1)^n - (-2X+3)^n$
10. $P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 26. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + 1$.

1. Trouver a et b de telle sorte que $1 - i$ soit racine de P.
2. Dans ce cas, trouver toutes les autres racines complexes de P.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Soient trois scalaires $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u + v + w = -a \qquad uv + vw + uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Exercice 28. Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce : on considère la suite de polynômes

$$\begin{cases} P_1 = 1,\ P_2 = 2X \\ \forall n \geq 1,\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_3 et P_4.
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $\sin(n\theta) = P_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$.
   (b) Déterminer les solutions de l'équation $\sin(nx) = 0$ sur $]0, \pi[$.
   (c) En déduire les racines de P_n sur $]-1, 1[$. Justifier que les $n-1$ racines trouvées sont 2 à 2 distinctes.
3. Déterminer pour tout $n \geq 1$ le degré et le coefficient dominant de P_n.
4. (a) Pour tout $n \geq 1$, donner la décomposition du polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) En déduire que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

5. Soit $n \geq 1$. Dériver deux fois par rapport à θ la relation obtenue au 2a et en déduire que

$$(1-X^2)P_n'' - 3XP_n' + (n^2-1)P_n = 0.$$

Exercice 29. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

V Résolutions d'équations avec des polynômes

Exercice 30. Expression de sommes.

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que : $P - P(X+1) = X^3$.
   En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que : $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$
   En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression simple de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Exercice 31. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Exercice 32. On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 33.

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}$ tels que : $P = XP'$.
2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}$ tels que : $(2X^2-3)P'' - 6P = 0$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = 0$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}$ tels que : $P(X+1) = -P$.

Exercice 34. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer $P_2,\ P_3$ et P_4. Déterminer également les racines de ces trois polynômes.

2. Déterminer pour tout $n \geq 0$ le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(1)$.
4. Soit $n \geq 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos t) = \cos(nt).$$
   (b) Réciproquement, montrer que si Q_n est un polynôme tel que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos t) = \cos(nt)$$
   alors $P_n = Q_n$.
5. Etudier la parité de P_n. On pourra s'intéresser au polynôme $Q = P_n(-X) - (-1)^n P_n$.
6. Soit $n \geq 0$.
   (a) Déterminer les racines de P_n sur $[-1, 1]$.
   (b) En déduire toutes les racines de P_n.

Exercice 35. Soit a un réel, n un entier naturel non nul et

$$Z = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{4ki\pi}{n}} - 2\cos(a) e^{\frac{2ki\pi}{n}} + 1 \right).$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 - 2\cos(a)X + 1$.
2. En déduire une factorisation de Z.
3. Simplifier Z.