TD 2 - Trigonométrie

Entraînements

Exercice 1. Calculer les réels suivants : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$
3. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$
4. $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et enfin dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
3. $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$
4. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

1. $\cos(3x-2) = \cos(2x-1)$
2. $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
3. $\tan(x+1) + \tan(3x+1) = 0$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
5. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$
7. $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
8. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
9. $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$
10. $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$
11. $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$

Exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
   (a) $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ (b) $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (c) $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$
2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et $]-\pi, \pi]$:

1. $2\sin x - 1 < 0$
2. $2\cos(2x) > \sqrt{3}$
3. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1$
4. $\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1$
6. $\tan(x) \leq 1$

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $4\sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$
2. $\tan^2 x - 1 < 0$
3. $2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0$
4. $\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} < 0$
5. $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$
6. $\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$
7. $\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1$
8. $\cos x + \sin x - 1 < 0$
9. $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$

Type DS

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Exercice 9. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X) - 3}{2\sin^2(X) - 3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3}{2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3} \leq 2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

Exercice 10. On considére l'inéquation :

$$(I) : \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)} > 0$$

1. Déterminer D : l'ensemble de définition de (I).
2. Résoudre (I) sur $[0, 2\pi[\cap D$. On pourra faire un tableau de signes.