Correction TD 2 - Trigonométrie

Entraînements

Exercice 1. Calculer les réels suivants : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction 1.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** on a $\frac{pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.

- **Calcul de** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** de même, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **:** à partir du calcul précédent, on a :
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}}{4}}$$

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **:** Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2}$. On pose alors $\theta = \frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Ainsi,
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$
Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi :
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.}$$
Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On obtient ainsi,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.}$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x) = -\dfrac{1}{2}$
3. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$
4. $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

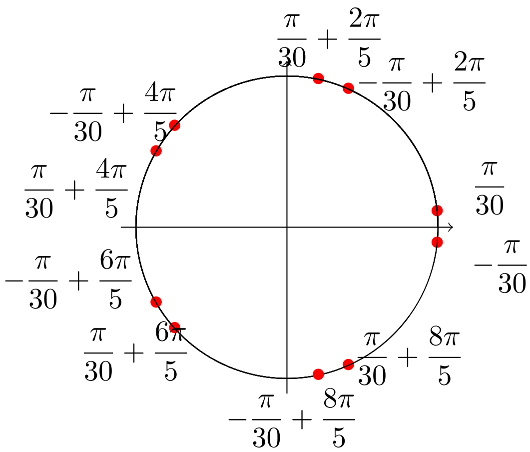
Correction 2. Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. **Résolution de $\cos(\mathbf{5x}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



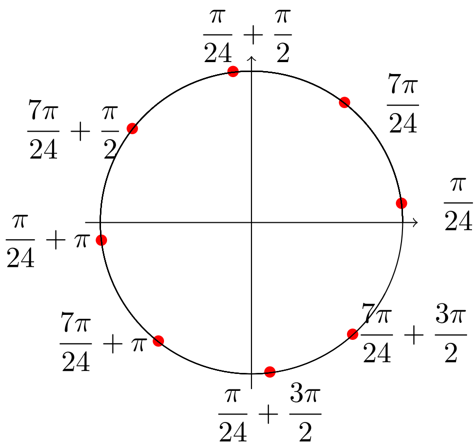
Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\dfrac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. **Résolution de $\sin(\mathbf{4x}) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

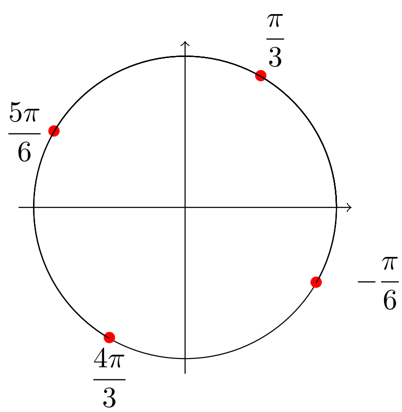
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\frac{k\pi}{2}=2\pi$, soit $k=4$.

3. **Résolution de** $\tan\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$
On obtient donc
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

4. **Résolution de** $\tan(\mathbf{2x})=-\sqrt{\mathbf{3}}$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
$$\tan(2x)=-\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \tan(2x)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k\pi.$$
On obtient donc
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$



Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0,2\pi[$ et enfin dans $]-\pi,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $-\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$
3. $\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x=0$
4. $\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=\sqrt{2}$

Correction 3.

1. **Résolution de $\sin \mathbf{x} - \cos \mathbf{x} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$:** On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$, on applique donc la méthode associée. On obtient alors

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} \exists k \in \mathbb{Z}, & x - \dfrac{3\pi}{4} & = & \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x - \dfrac{3\pi}{4} & = & -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

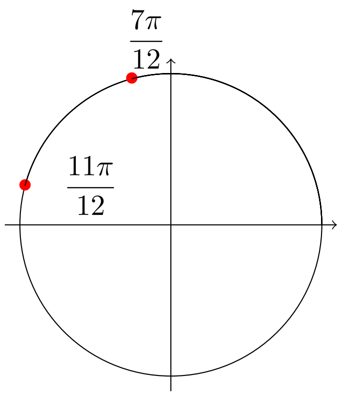
On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

- Sur $[0, 2\pi[$ comme sur $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}.}$$



2. **Résolution de $-\sqrt{3}\sin \mathbf{x} + \cos \mathbf{x} = \sqrt{2}$:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On obtient ainsi

- Sur $\mathbb{R}$:

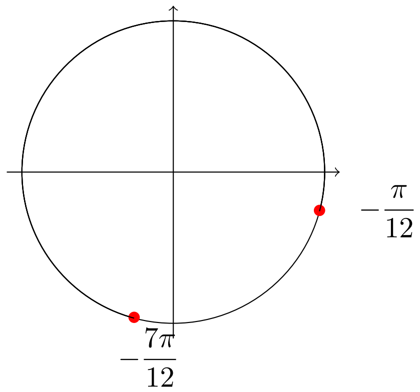
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

- Sur $[0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}.}$$

- Sur $[-\pi, \pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.}$$

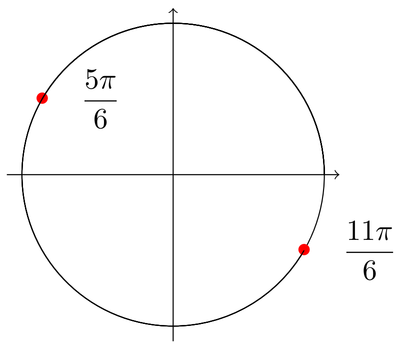


3. **Résolution de** $\sin \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \cos \mathbf{x} = \mathbf{0}$ **:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On a :

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$
- Sur $[0, 2\pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.}$
- Sur $[-\pi, \pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.}$



4. **Résolution de** $\cos(\mathbf{2x}) + \sqrt{\mathbf{3}} \sin(\mathbf{2x}) = \sqrt{\mathbf{2}}$ **:** Quitte à poser $X = 2x$, l'égalité est de type $a\cos(X) + b\sin(X) = c$, on applique donc la méthode du cours. On se ramène ainsi à l'équation fondamentale suivante : $\cos(X - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{array}\right.$$

On obtient ainsi :

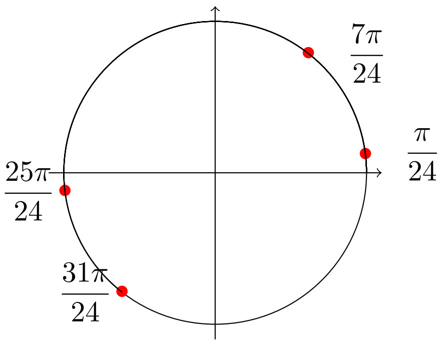
- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{24} + k\pi\right\}.}$

- Sur $[0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}\right\}}.$$

- Sur $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{23\pi}{24}, -\frac{17\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right\}}.$$



Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

1. $\cos(3x - 2) = \cos(2x - 1)$
2. $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
3. $\tan(x + 1) + \tan(3x + 1) = 0$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
5. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0$
7. $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
8. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
9. $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$
10. $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$
11. $\tan^4(x) + 2\tan^2(x) - 3 = 0$

Correction 4.

1. **Résolution de $\cos(\mathbf{3x - 2}) = \cos(\mathbf{2x - 1})$:**

On sait que $\cos(X) = \cos(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & X = Y + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & X = -Y + 2k\pi. \end{cases}$ On peut appliquer cela ici et on obtient :

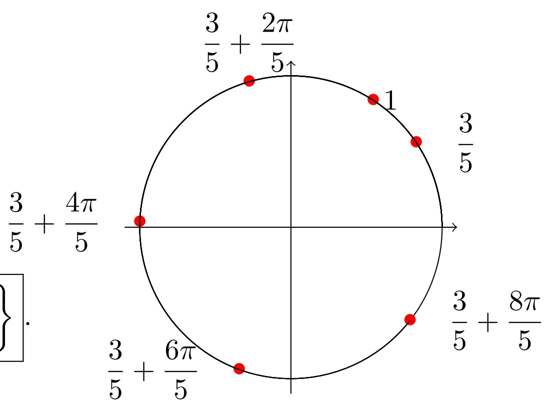
$$\cos(3x - 2) = \cos(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & 3x - 2 = 2x - 1 + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & 3x - 2 = -2x + 1 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & x = 1 + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \frac{3}{5} + \frac{2k\pi}{5}. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{1, \frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \frac{2\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{4\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{6\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{8\pi}{5}\right\}}.$$



2. **Résolution de** $\sin\left(\mathbf{3x}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\mathbf{2x}+\frac{\pi}{6}\right)$ **:**

De même, on sait que $\sin(X)=\sin(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, & X = Y+2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & X = \pi - Y+2k\pi. \end{cases}$ On peut appliquer cela ici et on obtient :

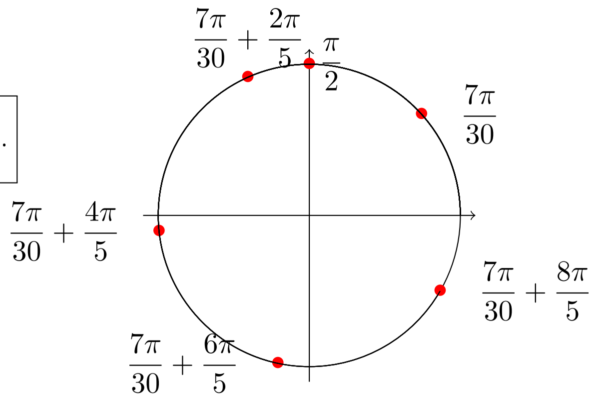
$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, & 3x-\frac{\pi}{3} = 2x+\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & 3x-\frac{\pi}{3} = \pi-2x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, & x = \frac{\pi}{2}+2 \\ \text{ou} & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & x = \frac{7\pi}{30}+ \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{30},\frac{19\pi}{30},\frac{31\pi}{30},\frac{43\pi}{30},\frac{55\pi}{30}\right\}}.$$



3. **Résolution de** $\tan(\mathbf{x+1})+\tan(\mathbf{3x+1})=\mathbf{0}$ **:**

- On commence par rechercher le domaine de définition de cette équation. On doit donc avoir pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $3x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. On obtient donc que $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}-1+k\pi;\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- De même que dans les deux exemples précédents, on sait que $\tan(X)=\tan(Y)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ X=Y+k\pi$. On peut appliquer cela ici et on obtient en utilisant tout d'abord l'imparité de la tangente :

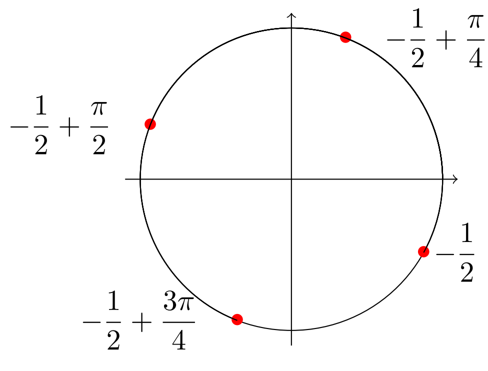
$$\begin{aligned}\tan(x+1)+\tan(3x+1)=0 &\Leftrightarrow \tan(x+1)=-\tan(3x+1)\Leftrightarrow\tan(x+1)=\tan(-3x-1)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x+1=-3x-1+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4}.\end{aligned}$$

Comme pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4}\in\mathcal{D}$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2},-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\right\}}.$$



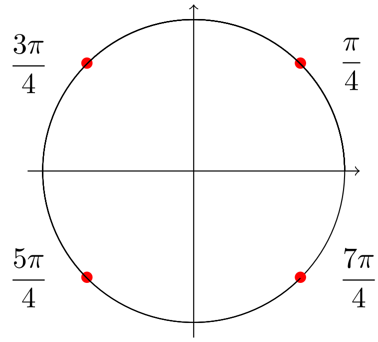
4. **Résolution de** $\sin^2\mathbf{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ **:**

En posant $X=\sin(x)$, on doit résoudre $X^2=\frac{1}{2}$, à savoir : $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $X=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. On doit donc résoudre $\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\sin(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient ainsi

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}.$$



5. **Résolution de $\sin(\mathbf{2x}) = \cos\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)$:**
Une façon de faire ici est de transformer le cosinus en sinus. On obtient ainsi

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x & = & \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x & = & \pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} + 2k\pi \end{array}\right.$$

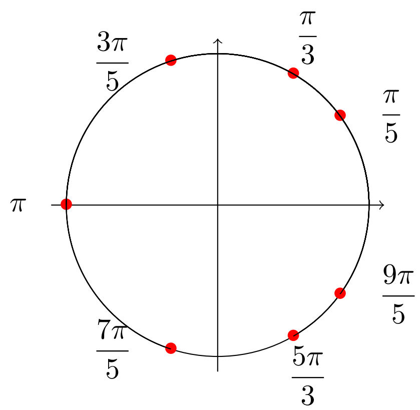
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = & \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = & \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4k\pi}{5}. \end{array}\right.$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{5}\right\}}.$$

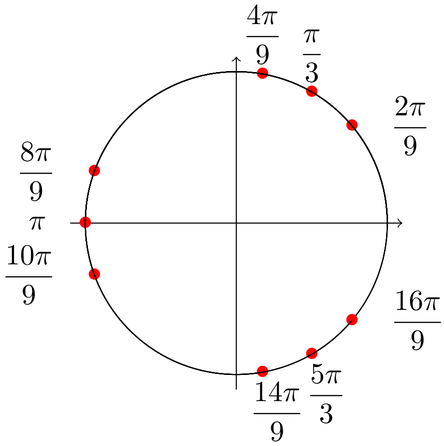


6. **Résolution de $\mathbf{2}\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{3x}) + \mathbf{3}\cos(\mathbf{3x}) + \mathbf{1} = \mathbf{0}$:**
On pose le changement de variable $X = \cos(3x)$ et on doit donc résoudre $2X^2 + 3X + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les deux solutions distinctes sont donc $X_1 = -1$ et $X_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi on doit donc résoudre $\cos(3x) = -1$ et $\cos(3x) = -\dfrac{1}{2}$. La résolution de ces deux équations fondamentales donne

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \pi, \frac{10\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{5\pi}{3}, \frac{16\pi}{9}\right\}}.$$



7. **Résolution de $\mathbf{2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)}$:**
En utilisant la formule de duplication du sinus, on obtient la factorisation suivante

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \text{ ou } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \text{ ou } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation est de type $a\cos x + b\sin x$. On obtient :

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \quad = \quad 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right).$$

Ainsi,

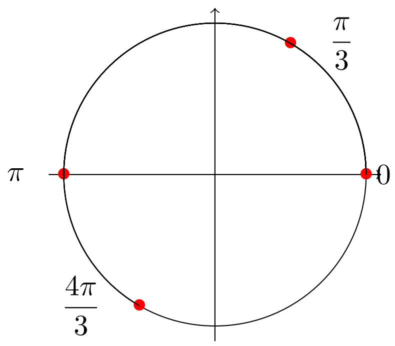
$$2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \text{ ou } \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \exists k \in \mathbb{Z}, & x & = k\pi \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x & = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x & = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et de plus :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}}.$$



8. **Résolution de $\sin\left(\mathbf{2x} - \frac{\pi}{\mathbf{4}}\right) = -\cos\left(\mathbf{x} + \frac{\pi}{\mathbf{6}}\right)$:**
On transforme le cosinus en sinus afin de se ramener à une équation fondamentale. On a en utilisant l'imparité du sinus :

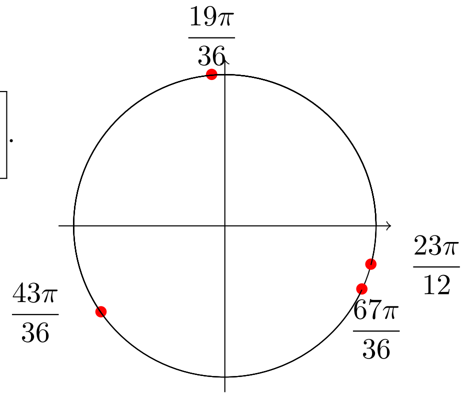
$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z},\ 2x-\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-x+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\exists k\in\mathbb{Z},\ x&=&-\frac{\pi}{12}+2k\\ \text{ou}\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ x&=&-\frac{5\pi}{36}+\frac{2}{}\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{19\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$



Et on a :

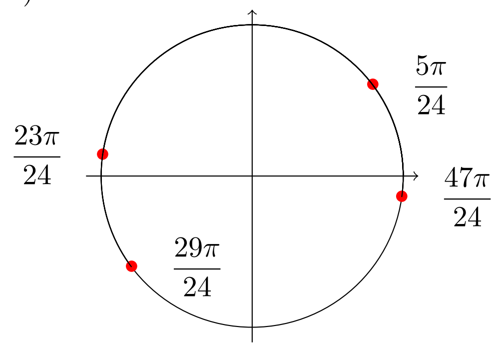
$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{19\pi}{36},\frac{43\pi}{36},\frac{67\pi}{36},\frac{23\pi}{12}\right\}}.$$

9. **Résolution de $\mathbf{\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x\sin x-\sqrt{3}\sin^2 x=\sqrt{2}}$:**
On commence par utiliser le formulaire de trigonométrie afin de transformer l'expression :

$$\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x\sin x-\sqrt{3}\sin^2 x=\sqrt{3}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sin(2x)=\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x).$$

On pose $X=2x$, et on factorise $\sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)$.
On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{5\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$



Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{5\pi}{24},\frac{23\pi}{24},\frac{29\pi}{24},\frac{47\pi}{24}\right\}}.$$

10. **Résolution de $\mathbf{1+\cos x+\sin(5x)+\sin(6x)=0}$:**
On commence par transformer l'expression grâce au formulaire de trigonométrie afin de la mettre sous forme factorisée. On obtient

$$1+\cos x+\sin(5x)+\sin(6x)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\right).$$

Ainsi résoudre $1+\cos x+\sin(5x)+\sin(6x)=0$ est équivalent à résoudre $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$ ou $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{11x}{2}\right)=0$. On peut déjà résoudre la première équation et on obtient

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ x=\pi+2k\pi.$$

Étudions la deuxième équation :

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{11x}{2}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(-\frac{11x}{2}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{11x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}&=&\frac{\pi}{2}+\frac{11x}{2}+2k\pi\\ \text{ou}\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}&=&-\frac{\pi}{2}-\frac{11x}{2}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\exists k\in\mathbb{Z},\ x&=&-\frac{\pi}{10}-\frac{2k\pi}{5}\\ \text{ou}\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ x&=&-\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Ainsi, on obtient

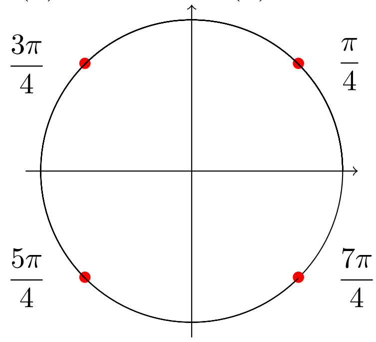
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \text{et } \mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{12}, \pi, \frac{11\pi}{10}, \frac{15\pi}{12}, \frac{15\pi}{10}, \frac{19\pi}{12}, \frac{19\pi}{10}, \frac{23\pi}{12}\right\}. \end{array}}$$

11. **Résolution de $\tan^4 x + 2\tan^2 x - 3 = 0$:**
On pose le changement de variable $X = \tan^2(x)$ et on doit donc résoudre : $X^2 + 2X - 3 = 0$. Le calcul du discriminant donne que les solutions sont -3 et 1. Ainsi, on doit résoudre les deux équations $\tan^2(x) = -3$ et $\tan^2(x) = 1$. Comme un carré est toujours positif, la première équation est impossible. La deuxième équation donne $\tan(x) = -1$ ou $\tan(x) = 1$.

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}.$$



Exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
(a) $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ (b) $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ (c) $\tan x = \dfrac{2u}{1-u^2}$
2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

Correction 5.

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) On a $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a
   $$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$
   (b) De même, $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a
   $$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$
   (c) On a $1 - u^2 \neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \notin \{-1, 1\}$. On doit donc avoir $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :
   $$\frac{2u}{1-u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc

$$\boxed{\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$$

.

On pose alors $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}-3\frac{2u}{1+u^2}+2u-1=0 \Leftrightarrow \frac{1-u^2-6u+2u+2u^3-1-u^2}{1+u^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2u(u^2-u-2)}{1+u^2}=0.$$

On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u\in\{0,-1,2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

- $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\arctan(2)+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\arctan(2)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{S=\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2\arctan 2+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0,2\pi[$ et $]-\pi,\pi]$:

1. $2\sin x-1<0$
2. $2\cos(2x)>\sqrt{3}$
3. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x)>1$
4. $\sin(3x)\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\sqrt{2}\cos(3x)\leq 1$
6. $\tan(x)\leq 1$

Correction 6.

1. **Résolution de $\mathbf{2\sin(x)-1<0}$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :$2\sin x-1<0\Leftrightarrow \sin x<\frac{1}{2}$.
On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[}.$$

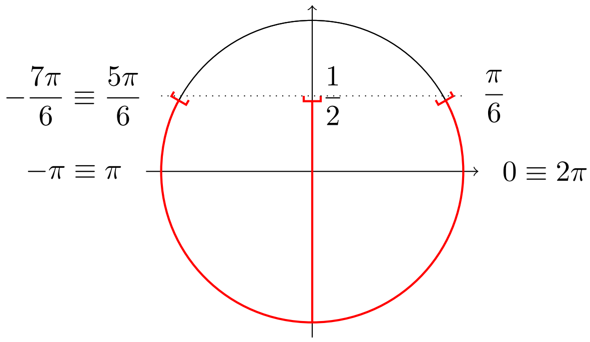
Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left[0,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},2\pi\right[}$$

.

Et finalement :

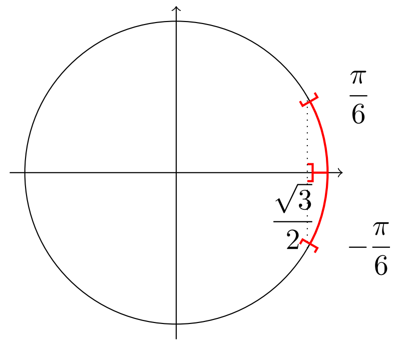
$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]}=\left]-\pi,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right]}.$$



2. **Résolution de $\mathbf{2}\cos(\mathbf{2x}) > \sqrt{\mathbf{3}}$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$2\cos(2x) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\star).$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :



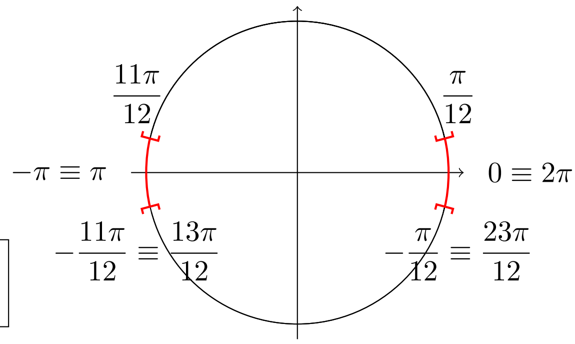
$$\begin{aligned}(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi.\end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right[}$.

Bien penser à refaire un deuxième cercle pour tracer les solutions, et pouvoir en déduire les solutions sur les intervalles demandés.

On a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right[}.$$



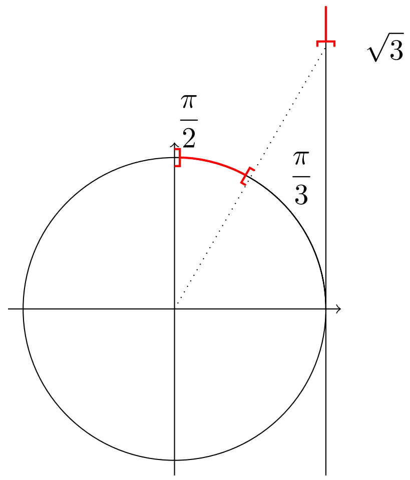
Et finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \pi\right]}.$$

3. **Résolution de $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\tan(\mathbf{3x}) > \mathbf{1}$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1 \Leftrightarrow \tan(3x) > \sqrt{3} \quad (\star)$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :



$$\begin{aligned}(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right[}.$$

On refait alors un autre cercle trigonométrique (à faire) afin de placer les angles solutions et on obtient, en prenant $k \in [\![0, 5]\!]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{16\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}\right[}.$$

Enfin, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{8\pi}{9}, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{9}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}\right[}$$

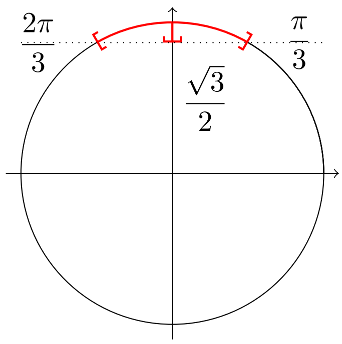
.

4. **Résolution de** $\sin(\mathbf{3x}) \geq -\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$ **:**
La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned}
\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



On fait un cercle trigonométrique pour placer les solutions, et on obtient, en prenant $k \in [\![0, 2]\!]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}, 2\pi\right[}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{8\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \pi\right]}.$$

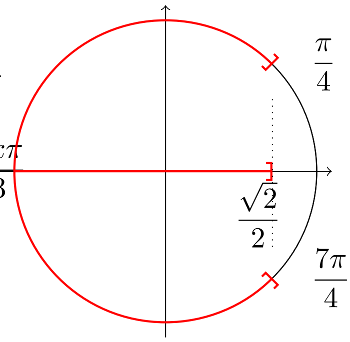
5. **Résolution de $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1$:**

On a : $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow \cos(3x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\cos(3x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq 3x \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$



On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$

Afin de donner les solutions dans $[0, 2\pi[$ et dans $]-\pi, \pi]$, on représente les solutions sur un cercle trigonométrique en prenant $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]}.$$

Et finalement :

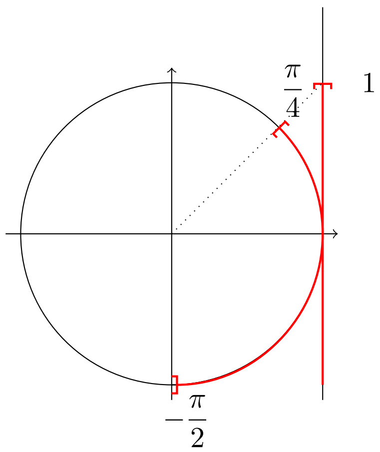
$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \pi\right]}.$$

6. **Résolution de $\tan(x) \leq 1$:**

La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$\tan(x) \leq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

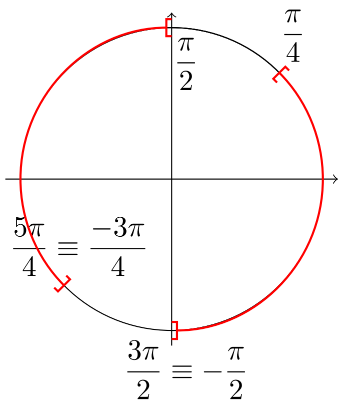
On obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]}$.



Attention, les solutions pour la tangente sont définies modulo π, et non 2π. Il y a donc deux intervalles solutions à tracer sur le cercle trigonométrique.

On a donc : $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$.

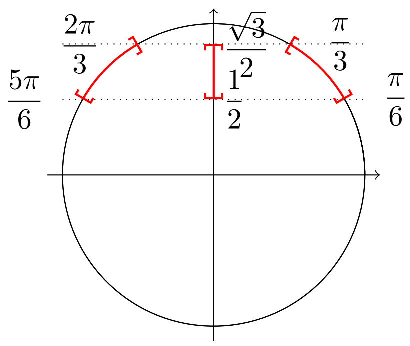
Et finalement : $\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$.



Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $4\sin^2 x - (2+2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$
2. $\tan^2 x - 1 < 0$
3. $2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0$
4. $\tan^2 x - (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} < 0$
5. $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$
6. $\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$
7. $\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1$
8. $\cos x + \sin x - 1 < 0$
9. $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$

Correction 7.

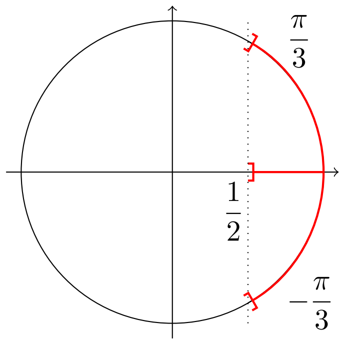
1. **Résolution de $\mathbf{4\sin^2(x) - (2+2\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} \leq 0}$:**
   On pose $X = \sin(x)$ et on doit donc résoudre $4X^2 - (2+2\sqrt{3})X + \sqrt{3} \leq 0$. Le calcul du discriminant donne $\Delta = (2\sqrt{3}-2)^2$ et on obtient ainsi comme solutions $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Ainsi :
   $$4X^2 - (2+2\sqrt{3})X + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   Comme $X = \sin(x)$, on obtient au final que :
   $$4\sin^2(x) - (2+2\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   La résolution sur le cercle trigonométrique donne
   $$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \right).}$$
   

2. **Résolution de $\mathbf{\tan^2(x) - 1 < 0}$:**
   On a : $\tan^2 x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < \tan(x) < 1$. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique (à faire) donne
   $$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[.}$$

3. **Résolution de $\mathbf{2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0}$:**
   On pose $X = \cos(3x)$ et on doit donc résoudre $2X^2 - 3X + 1 \leq 0$. Le calcul du discriminant donne que les solutions sont $\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi $2X^2 - 3X + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq X \leq 1$. Comme $X = \cos(3x)$, on obtient que :
   $$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos(3x) \leq 1.$$

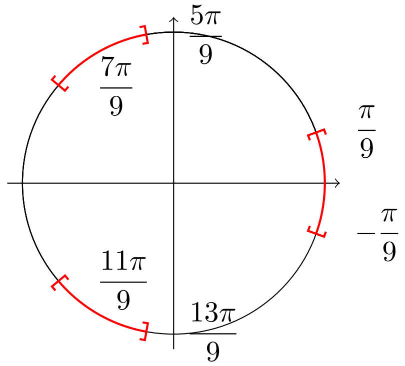
La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$\frac{1}{2} \leq \cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi.$



On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right[}.$$



4. **Résolution de $\tan^2(\mathbf{x}) - (\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})\tan(\mathbf{x}) - \sqrt{\mathbf{3}} < \mathbf{0}$:**
   On pose $X = \tan(x)$ et on doit donc résoudre $X^2 - (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} < 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2$ et ainsi les solutions sont -1 et $\sqrt{3}$. On obtient donc :
   $$X^2 - (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < X < \sqrt{3}.$$
   Comme $X = \tan(x)$, on obtient que :
   $$\tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < \tan(x) < \sqrt{3}.$$
   La résolution par le cercle trigonométrique (à faire) donne
   $$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right[}.$$

5. **Résolution de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \leq \sin^2(\mathbf{x}) \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$:**
   On pose $X = \sin(x)$ et on doit résoudre $\frac{1}{4} \leq X^2 \leq \frac{1}{2}$ ce qui est équivalent à $X^2 - \frac{1}{2} \leq 0$ et $\frac{1}{4} - X^2 \leq 0$. Comme $X^2 - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $\frac{1}{4} - X^2 \leq 0 \Leftrightarrow X \geq \frac{1}{2}$ ou $X \leq -\frac{1}{2}$, on obtient que
   $$\frac{1}{4} \leq X^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow \sin(x) \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$
   La résolution sur le cercle trigonométrique (à faire) donne
   $$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k}$$

6. **Résolution de $\cos(\mathbf{x}) - \sin(\mathbf{x}) \geq \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$:**
   On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc
   $$\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a ainsi obtenu une inégalité fondamentale de type $\cos(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec ici $X = x + \frac{\pi}{4}$) et on résout donc cela graphiquement sur le cercle trigonométrique (à faire). On obtient alors

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{5\pi}{12}+2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12}+2k\pi.$$

On obtient donc les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi, -\frac{\pi}{12}+2k\pi\right]}.$$

7. **Résolution de** $\sin(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\cos(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{1}$ **:**
On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc

$$\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) \leq -1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a changé le sens de l'inégalité car $-\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$. On a ainsi obtenu une inégalité fondamentale de type $\cos(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec ici $X = x + \frac{\pi}{3}$) et on résout donc cela graphiquement sur le cercle trigonométrique (à faire). On obtient alors

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

On obtient donc les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]}.$$

8. **Résolution de** $\cos(\mathbf{x}) + \sin(\mathbf{x}) - \mathbf{1} < \mathbf{0}$ **:**
On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc

$$\cos x + \sin x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La résolution sur le cercle trigonométrique (à faire) donne :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}+2k\pi < x-\frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2}+2k\pi < x < 2\pi+2k\pi.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right[}.$$

9. **Résolution de** $\sqrt{\mathbf{3}}\cos(\mathbf{x}) + \sin(\mathbf{x}) - \sqrt{\mathbf{2}} < \mathbf{0}$ **:** Même méthode.

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On obtient par résolution graphique sur le cercle trigonométrique (à faire) :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}+2k\pi < x-\frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{4}+2k\pi.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{5\pi}{12}+2k\pi, \frac{23\pi}{12}+2k\pi\right[}.$$

Type DS

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Correction 8.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Réduction d'intervalle :
   - Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + \pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   - Montrons que f est paire : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
   - Soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
     On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe. Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. La fonction $x \mapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \mapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

   De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.
   Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geq 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geq 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-\ln 2$

   En effet : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.
4. Graphe de f :

./ex14-eps-converted-to.pdf

5. (À faire plus tard) On a
   - La fonction f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit et composée de fonctions continues.
   - La fonction f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.
   - $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln 2$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $]-\infty, -\ln 2]$.

Exercice 9. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X) - 3}{2\sin^2(X) - 3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3}{2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3} \leq 2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

Correction 9. 1.

$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq 2y - \frac{y-3}{2y-3} \\ \iff & 0 & \leq \frac{4y^2-7y+3}{2y-3} \end{array}$$

$4y^2 - 7y + 3$ admet pour racines : $y_0 = 1$ et $y_1 = \frac{3}{4}$, donc

$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq \frac{4(y-1)(y-\frac{3}{4})}{2(y-\frac{3}{2})} \end{array}$$

Donc les solutions de (E_1) sont

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left[\tfrac{3}{4}, 1\right] \cup \left]\tfrac{3}{2}, +\infty\right[}$$

2. X est solutions de (E_2) si et seulement si :

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

Comme pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sin(X) \in [-1,1]$, ceci équivaut à

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

c'est-à-dire : $\sin^2(X) \geq \frac{3}{4}$, soit $\left(\sin(X) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin(X) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0$ On obtient donc

$$\sin(X) \in \left[-1, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right]$$

On a d'une part $\sin(X) \leq \frac{-\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$ et d'autre part $\sin(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$
Ainsi les solutions de (E_2) sont

$$\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$ et $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$, on peut simplifier les solutions de la manière suivante :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]}$$

3. x est solution de (E_3) si et seulement si

$$2x + \frac{\pi}{6} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$$

C'est-à-dire

$$2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$$

On obtient

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right]$$

Les solutions sur $[0, 2\pi[$ sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left[\tfrac{\pi}{12}, \tfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \pi, \tfrac{\pi}{2} + \pi\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2}\right]}$$

Exercice 10. On considére l'inéquation :

$$(I) : \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)} > 0$$

1. Déterminer D : l'ensemble de définition de (I).
2. Résoudre (I) sur $[0, 2\pi[\cap D$. On pourra faire un tableau de signes.

Correction 10. 1. (I) est définie pour tout x tel que

$$\sin(x)(2\cos(x) - 1) \neq 0$$

Résolvons donc

$$\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad 2\cos(x) - 1 = 0$$

L'ensemble des solutions de la première équation est $\mathcal{S}_1 = \{0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ qui se simplifie en

$$\mathcal{S}_1 = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

La deuxième équation s'écrit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

dont les solutions sont

$$\mathcal{S}_2 = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Finalement on obtient que (I) est définie sur

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. Sur $[0, 2\pi[$ on obtient

$$\sin(x) \geq 0 \iff x \in [0, \pi]$$

$$(2\cos(x) - 1) \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$$

$$2\sin(x) - \sqrt{2} \geq 0 \iff \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$2\sin(x) - \sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sin(x)$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$		$+$	$\|\|$	$-$		$-$	
$2\cos(x) - 1$		$+$		$+$	$\|\|$	$-$		$-$		$-$	$\|\|$	$+$	
$\dfrac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)}$	$\|\|$	$-$		$+$	$\|\|$	$-$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

$$\boxed{\mathcal{S} =]\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}[\cup]\tfrac{3\pi}{4}, \pi[\cup]\tfrac{5\pi}{3}, 2\pi[}$$