TD 3 - Sommes, produits et récurrences

Entraînements

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \text{ et } E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$
9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$
10. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$
11. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

Exercice 3. Coefficients binomiaux
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle S_1 = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}$
2. $\displaystyle T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$, puis $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1) + k$).
3. $\displaystyle S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}$.

Exercice 4. Sommes télescopiques

1. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_{i-1})$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Exercice 5. Sommes télescopiques

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Retrouver ce résultat par récurrence : montrer que $\forall n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S.

Exercice 7. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
3. Calculer de la même façon : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Exercice 8. Sommes d'indices pairs et impairs

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\prod_{k=i}^{i+n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

Exercice 11. Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$
7. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$
8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$

Type DS

Exercice 12. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Exercice 13. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,
   $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :
   $$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} b_k$$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

Exercice 14. 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. On rappelle que l'on note $\max(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$

4. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \right)$$

5. On note

$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$

   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq b$.

   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.