Correction TD 3 - Sommes, produits et récurrences

Entraînements

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \text{ et } E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Correction 1.

- $A = \dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7 \times 6!}{6!} = \boxed{7.}$
- $B = \dfrac{3 \times 4!}{(3!)^2} = \dfrac{3 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n(n^2 - 1 + 1) = \boxed{n^3.}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$
9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$
10. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$
11. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$

Correction 2.

1. **Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$:**
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k} = (x^2)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{cases}}$$

Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k+1}$:
On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k+1} = (x^2)^k \times x$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k = \boxed{\begin{cases} x \times \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \\ -(n+1) & \text{si } x = -1. \end{cases}}$$

2. **Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$:**
On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $a^k 2^{3k} x^{-k} = a^k (2^3)^k \times \dfrac{1}{x^k} = a^k \times 8^k \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \left(\dfrac{8a}{x}\right)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{8a}{x}\right)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{8a}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8a}{x}\right)} & \text{si } x \neq 8a \\ n+1 & \text{si } x = 8a. \end{cases}}$$

3. **Calcul de $\sum\limits_{i=0}^{n} (i^2+n+3)$:**
Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(i^2+n+3) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+3)\sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+3)(n+1) \\ &= \boxed{\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+18\right)} \end{aligned}$$

4. **Calcul de $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1)^3$:**
On commence par développer la puissance cube à l'intérieur de la somme puis on utilise la linéarité de la somme. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(8i^3-12i^2+6i-1\right) \\ &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le formulaire sur les sommes et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 &= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \boxed{n^2(4n^2+4n+1)}. \end{aligned}$$

Une autre solution consiste à faire la somme des paires entre 1 et $2n$ puis simplifier l'expression avec la somme de tous les entiers au cube.

5. **Calcul de $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1}$:**
On commence par utiliser les propriétés sur les puissances et on obtient que : $(1-a^2)^{2k+1} = [(1-a^2)^2]^k \times (1-a^2)^1$. Par linéarité de la somme et en reconnaissant de plus la somme d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}[(1-a^2)^2]^k$. On doit donc étudier deux cas selon que $(1-a^2)^2 \neq 1$ ou que $(1-a^2)^2 = 1$.
   - Cas 1 : si $(1-a^2)^2 \neq 1$:
     On obtient alors : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\times((1-a^2)^2)^2 \times \frac{1-[(1-a^2)^2]^{n^2-1}}{1-(1-a^2)^2} = (1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{2a^2-a^4} = \boxed{(1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{a^2(2-a^2)}.}$
   - Cas 2 : si $(1-a^2)^2 = 1$:
     Regardons à quels a cela correctionrespond : $(1-a^2)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-a^2 = 1$ ou $1-a^2 = -1 \Leftrightarrow a^2 = 0$ ou $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ ou $a = 0$ ou $a = \sqrt{2}$. Calculons alors la somme pour ces a : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}1 = (1-a^2)\times(n^2-1)$. Il faut alors distinguer encorrectione deux cas :
     - ⋆ Si $a = 0$ alors $1-a^2 = 1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = n^2-1.}$
     - ⋆ Si $a = -\sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2}$ alors $1-a^2 = -1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = -n^2+1.}$

6. **Calcul de $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)$:**
$\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}2^k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\times 2\times \frac{1-2^n}{1-2} + n$ par linéarité et car $2 \neq 1$. Donc
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 6(2^n-1)+n.}$$

7. **Calcul de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)$:**
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ car $e^{\frac{1}{n}} \neq 1$. Ainsi $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.}$

8. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k)$:**
$\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = 2\sum_{k=0}^{n}k - \sum_{k=0}^{n}1 + \sum_{k=0}^{n}2^k = 2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) + \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ par linéarité et car $2 \neq 1$. Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = n^2+2^{n+1}-2.}$

9. **Calcul de $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j$:**
$\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n}$ en reconnaissant un binôme de Newton car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j1^{n-j}$

Calcul de $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j$:

On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j - \binom{n}{0}a^0 + \binom{n}{n+1}a^{n+1}$. Par convention, on a : $\binom{n}{n+1} = 0$ et ainsi on obtient en utilisant le binôme de Newton : $\boxed{\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n - 1.}$

10. **Calcul de $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$:**

 $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = 0}$ grâce au binôme de Newton car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 1^{n-j} = (1-1)^n$.

11. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i$:**

 On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1} = (1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 + (-1)^{n+2} = -1 + (-1)^n = (-1)^n - 1$. Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = (-1)^n - 1.}$

12. **Calcul de $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$:**

 On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant les propriétés sur les puissances. On obtient $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}}.}$

13. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$:**

 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k}$. Afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton, on utilise la relation de Chasles pour obtenir : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \boxed{\frac{4^n-1}{3^n}.}$

Exercice 3. Coefficients binomiaux

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}$
2. $T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, puis $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1)+k$).
3. $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Correction 3.

1. **Calcul de $\mathbf{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}}$:**

   On peut déjà remarquer que : $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0 \times \binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$.
   Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le j. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :
   $$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1}$$
   car n est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de Newton, on commence par poser le changement de variable : $i = j-1$ et on obtient $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à n à une somme allant de 1 à n car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de Chasles afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de Newton et on obtient $\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.}$

2. **Calcul de $\mathbf{T = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}}$:**

   Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement de variable $j = k-2$ et on obtient $T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$. Donc en utilisant le binôme de Newton, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}.}$

   Calcul de $S_2 = \mathbf{\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}}$:

   Comme $k^2 = k(k-1) + k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}.}$

3. **Calcul de $\mathbf{S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}}$:**

   Là encorrectione, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation i. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de Chasles pour faire apparaître le binôme de Newton. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient

$$\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right].}$$

Exercice 4. Sommes télescopiques

1. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1})$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Correction 4.

1. Dès que l'on a une soustraction entre deux sommes de même type avec juste un décalage d'indice, il faut reconnaître une somme télescopique et savoir la calculer. Le calcul utilise un ou plusieurs changements d'indice puis la relation de Chasles.
   - **Calcul de** $\mathbf{S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)}$ **:**

     $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=0}^{n} x_i$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j = i+1$ dans la première somme et on obtient : $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} x_j - \sum_{i=0}^{n} x_i$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i$. La relation de Chasles donne : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 = \boxed{x_{n+1}-x_0.}$
   - **Calcul de** $\mathbf{S' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1})}$ **:**

     $S' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j = i+1$ dans la première somme et le changement $k = i-1$ dans la deuxième somme et on obtient : $S' = \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} x_j - \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S' = \displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i$. La relation de Chasles donne : $S' = \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_n + x_{n+1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_i - x_0 - x_1 = \boxed{x_{n+1}+x_n-x_0-x_1.}$
2. **Calcul de** $\mathbf{S = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]}$ **:**
   On transforme cette somme en utilisant les propriétés du logarithme népérien et on obtient : $\ln\left(\dfrac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right) = 2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-2)$.
   Ainsi transformée, la somme S est bien de type télescopique car on a bien une soustraction de 3 sommes de même type avec juste des décalages d'indice. En effet, par linéarité, on obtient : $S = 2\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k-2)$. On pose le changement d'indice $j = k+1$ dans

la deuxième somme et le changement $i = k-2$ dans la troisième somme et on obtient

$$\begin{aligned}
S &= 2\sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \sum_{j=4}^{n+1} \ln(j) - \sum_{j=1}^{n-2} \ln(j) \\
&= 2\ln(3) + 2\ln(n-1) + 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n) - \ln(n+1) - \ln(1) - \ln(2) - \ln(3) \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{3n(n-1)}{2(n+1)}\right).}
\end{aligned}$$

Exercice 5. Sommes télescopiques

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Retrouver ce résultat par récurrence : montrer que $\forall n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Correction 5.

1. **Calcul de $\mathbf{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$:**
   - On commence par montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{(a+b)k+2a+b}{(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 1 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $b = -1$.

     Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.
   - Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la première somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la deuxième somme et on obtient : $S = \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}$ en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet et la relation de Chasles.
2. - On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. On met sur le même dénominateur puis on identifie car la relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{k^2(a+b+c) + k(4a+3b+c) + 3a}{k(k+1)(k+3)}$.

     Ainsi, par identification, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 4a+3b+c &= 1 \\ 3a &= -1 \end{cases}$. La résolution du système donne : $\boxed{a = -\frac{1}{3},\ b = 1 \text{ et } c = -\frac{2}{3}.}$

- En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$. On obtient donc par linéarité : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}$. On pose les changements de variable suivant : $j = k+1$ et $i = k+3$ et on obtient : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} - \frac{2}{3}\sum_{i=4}^{n+3}\frac{1}{i} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}$ car l'indice de sommation est muet. D'après la relation de Chasles, on obtient : $S = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) = \boxed{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n+3}\right).}$

3. **Calcul de $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}}$:**

⋆ Méthode 1 : calcul direct.

- On commence par montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 3a+2b+c &= 0 \\ 2a &= 1 \end{cases}$ donc $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$.
- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la deuxième somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la troisième somme et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) = \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

  en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet, la relation de Chasles et en mettant tout au même dénominateur.

⋆ Méthode 2 : par récurrence.

- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

- Initialisation : pour $n = 1$:
  ⋆ D'un côté, on a : $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$.
  ⋆ De l'autre côté, on a : $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\times 6} = \frac{1}{6}$.

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d'après la relation de Chasles. Puis par hypothèse de récurrence, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$ en mettant au même dénominateur. Pour le numérateur on remarque que -1 est racine évidente et ainsi en factorisant par $n+1$ on obtient par identification des coefficients que : $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4)$. Puis le calcul du discriminant donne que $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4) = (n+1)(n+1)(n+4)$. Ainsi on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6. **Sommes et dérivation :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S.

Correction 6. La dérivation d'une somme finie est une méthode très classique qui permet d'obtenir plein de nouvelles sommes. Il s'agit juste d'utiliser le fait que $(f+g)' = f' + g'$ et ainsi la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

1. D'après le binôme de Newton, on sait que : $\boxed{f(x) = (1+x)^n.}$
2. La fonction f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction f est définie par deux expressions différentes que l'on peut dériver :
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = (1+x)^n$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}.}$$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \cdots + nx^{n-1} + x^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}}$$
   car le premier terme pour $k=0$ est constant donc sa dérivée est nulle.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.}$

3. Il s'agit de remarquer que $S = g(1) = f'(1)$ et ainsi, on obtient que : $\boxed{S = n2^{n-1}.}$ On retrouve bien le même résultat.

Exercice 7. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
3. Calculer de la même façon : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Correction 7. Il s'agit ici du même type de méthode que pour l'exercice précédent sauf que cette fois ci, on l'applique à la somme des termes d'une suite géométrique et plus au binôme de Newton.

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et ainsi, on obtient, comme $x \neq 1$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme produit, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Ainsi, en dérivant, on obtient que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$

     ⚠La somme commence bien à $k = 1$ car le terme pour $k = 0$ dans $f(x)$ est le terme constant 1 qui est nul lorsqu'on dérive.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

   On a : $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx \times x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. D'après la question précédente, on obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = x \times \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$$

3. Il faut ici remarquer que la somme correctionrespond à dériver deux fois la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} x^k$. La fonction f est bien deux fois dérivables comme fonction polynomiale.

   Et en dérivant deux fois, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. Cette somme commence bien à $k = 2$ car quand on dérive deux fois les termes 1 et x, ils deviennent nuls. En dérivant deux fois l'autre expression de f, on obtient la valeur de la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}.}$$

Exercice 8. **Sommes d'indices pairs et impairs**

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

Correction 8.

1. • **Calcul de $\mathbf{S_n + T_n}$:**
   Si on ne voit pas comment débuter, on commence par écrire la somme $S_n + T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n + T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux : S_n correctionrespond en effet à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair et T_n correctionrespond à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair donc en sommant les deux on a bien la somme de tous les coefficients binomiaux pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = 2^{2n} = 4^n.}$

   • **Calcul de $\mathbf{S_n - T_n}$:**
   De même, on peut commencer par écrire la somme $S_n - T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux coefficientés par 1 ou par -1 : les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair sont coefficienté par 1 et les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair sont coefficienté par -1. Ainsi cela revient bien à sommer tous les nombres $\binom{2n}{k}(-1)^k$ pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = (1-1)^n = 0.}$

2. Il s'agit alors juste de résoudre le système $\begin{cases} S_n + T_n &= 2^{2n} \\ S_n - T_n &= 0. \end{cases}$. On obtient alors : $2S_n = 2^{2n}$ donc $S_n = 2^{2n-1}$ et $T_n = S_n = 2^{2n-1}$.

Exercice 9. Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} k$ et $\prod_{k=i}^{i+n} k$
2. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
6. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Correction 9.

1. **Calcul de $\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k}$** $= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \boxed{n!}$

Calcul de $\prod_{k=i}^{i+n} k$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=i}^{i+n} k &= i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)\\
&= \frac{[1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)]\times[i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)]}{[1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)]}\\
&= \frac{1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)\times i\times(i+1)\times(i+2)\times\cdots\times(i+n)}{1\times2\times3\times\cdots\times(i-1)} = \boxed{\frac{(i+n)!}{(i-1)!}.}
\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$:**

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}\times e^{\frac{2}{n}}\times e^{\frac{3}{n}}\times\ldots e^{\frac{n-1}{n}}\times e^{\frac{n}{n}} = e^{\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n}} = e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k} = \boxed{e^{\frac{n+1}{2}}.}$$

3. **Calcul de $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$** :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} &= \frac{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times3\times1} = \frac{(2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2)^2}{(2n+1)\times2n\times\ldots\times3\times2\times1}\\
&= \frac{(2^n n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1))^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}
\end{aligned}$$

4. **Calcul de $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)$** :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}2(2k-1) = 2^n\times(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1\\
&= \frac{2^n\times2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times3\times2\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2} = \frac{2^n\times(2n)!}{2^n\times n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!}}
\end{aligned}$$

5. **Calcul de $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$:**

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=2}^{n}k} =$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n}.}$$

6. **Calcul de $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}$:**

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(p-k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times2\times1} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}.$$

On essaye alors d'écrire le numérateur avec des factorielles. On obtient : $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times$

$(n-p+1) = \dfrac{[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)]\times[(n-p)\times\cdots\times 2\times 1]}{(n-p)\times\cdots\times 2\times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Ainsi on obtient au final que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \boxed{\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.}$

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

Correction 10. On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{2}\right)$. D'après les propriétés du logarithme népérien, on a :

$$S = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\right) = \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{n}2}\right) = \ln\left(\frac{n!}{2^n}\right).$$

Ainsi on obtient que : $\boxed{S = \ln\left(\dfrac{n!}{2^n}\right).}$

Exercice 11. Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}p(q^2+1)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i2^j$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l+1}$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x^j$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2}ki^2$
7. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}$
8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$

Correction 11.

1. **Calcul de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}p(q^2+1)$:**

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\sum_{q=0}^{m}q^2+p\sum_{q=0}^{m}1\right]\\ &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+p(m+1)\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sum_{p=0}^{n}p+(m+1)\sum_{p=0}^{n}p\\ &= \boxed{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2}+(m+1)\frac{n(n+1)}{2}.}\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1$ et de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}1\right] = \sum_{i=1}^{n}[n] = n\sum_{i=1}^{n}1 = \boxed{n^2.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n}i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

3. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} i2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\times 2\frac{1-2^n}{1-2}\right] = 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{(2^n-1)n(n+1).}$$

4. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$:**

On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas car on ne connaît pas la somme des inverses. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l+1} = \sum_{0\leq k\leq l\leq n}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1}$$

On peut également détailler les calculs : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & k & \leq & n \\ k & \leq & l & \leq & n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & l & \leq & n \\ 0 & \leq & k & \leq & l. \end{array}\right.$ Ainsi on obtient que :

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\sum_{k=0}^{l}k\right] = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\times\frac{l(l+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n} l = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}.}$$

5. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$:**

- Si $x=1$, on a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $x\neq 1$: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} x^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x\frac{1-x^i}{1-x}\right] = \frac{x}{1-x}\sum_{i=1}^{n}(1-x^i) = \frac{x}{1-x}\left[\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}x^i\right]$.

  Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \frac{x}{1-x}\left[n-x\frac{1-x^n}{1-x}\right].}$

6. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$:**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2 &= \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\sum_{i=k}^{k+2} i^2\right] = \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\left(k^2+(k+1)^2+(k+2)^2\right)\right] = \sum_{k=0}^{n^2} k(3k^2+6k+5) \\ &= 3\sum_{k=0}^{n^2}k^3 + 6\sum_{k=0}^{n^2}k^2 + 5\sum_{k=0}^{n^2}k = \boxed{3\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)^2 + n^2(n^2+1)(2n^2+1) + 5\frac{n^2(n^2+1)}{2}.}\end{aligned}$$

7. **Calcul de $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$:**

- Si $x=1$, on a : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $x\neq 1$: $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\sum_{i=0}^{j}x^i\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\frac{1-x^{j+1}}{1-x}\right] = \frac{1}{1-x}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^j - x\right]$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x-1} - xn\right].}$$

8. **Calcul de** $\mathbf{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}}$ **:**
On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}$$

On peut également détailler les calculs : $\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & i & \leq & n \\ i & \leq & j & \leq & n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & j & \leq & n \\ 1 & \leq & i & \leq & j. \end{array}\right.$ Ainsi on obtient que : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\right] = \sum_{j=1}^{n}[2^j-1] = \boxed{2(2^n-1)-n.}$

Type DS

Exercice 12. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\geq 0$

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n}F_{2k+1}=F_{2n+2}$ et $\sum_{k=0}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1$.
2. Montrer que pout tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2=\varphi+1$ et $\psi^2=\psi+1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n-\psi^n)$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$.

Correction 12. 1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n\in\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{« } \sum_{k=0}^{n}F_{2k+1}=F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1 \text{ ».}$$

Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0}F_{2k+1}=F_{0+1}=F_1=1$$

et

$$F_2=F_1+F_0=1$$

Donc la première égalité est vraie au rang 0.
Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0}F_{2k}=F_0=0$$

et

$$F_{2*0+1}-1=F_1-1=0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n\geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}.\\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.
Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}.\\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.
   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2\\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1})\\ &= F_{n+1}F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion :
   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi^2) - \psi^n(\psi^2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi+1) - \psi^n(\psi+1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\
&= u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi \frac{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\
&= \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}
\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$

Exercice 13. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} b_k$$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

Correction 13. **Partie I : Quelques exemples**

1. Pour $a_n = 1$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Pour $a_n = exp(n)$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^k = (1 + e^1)^n$.
3. (a)

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(b) Comme le premier terme est nul $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ Et d'après la question précédente on a donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$ Or en faisant un changement de variable on obtient $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = n2^{n-1}$$

(c) D'après la question 3a) on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$. Donc

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

On fait un changement de variable $k+1=j$ on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - 1\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

Partie II : Formule d'inversion

1. C'est l'exercice 2 du DM 4.
2. $$\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} = \sum_{i=0}^{n-k+1}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} - (-1)^{n-k+1}$$

   Et d'après le BdN :

   $$\sum_{i=0}^{n-k+1}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} = (1-1)^{n-k} = 0$$

   et

   $$-(-1)^{n-k+1} = (-1)^{n-k}$$

   Ce qui donne le résultat.
3. $b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a_k + a_{n+1}$. Donc

   $$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a_k$$

4. Soit $P(n)$ la propriété : " $\forall p \leq n\ a_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_p$."

   Montrons $P(0)$: "$\forall j \leq 0\ a_j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}b_k$." Il suffit de vérifier $a_0 = \sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k}\binom{0}{k}b_k$.

   Et on a $\sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k}\binom{0}{k}b_k. = b_0$ Par ailleurs, par définition $b_0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a_k = a_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité

On suppose que P est vraie pour un certain entier naturel n fixé. Montrons $P(n+1)$. Pour cela il suffit de vérifier que

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

Or on a vu que

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p$$

et en utilisant l'hypothése de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_k\\ &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{p}\binom{p}{k}(-1)^{p-k}b_k\\ &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k\end{aligned}$$

D'après la question II . 1.

On échange les deux symboles sommes on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k\sum_{p=k}^{n}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1-k}{i}(-1)^{i}\end{aligned}$$

En faisant le cahngement d'indice $p-k=i$.

On obtient finalement en utilisant la question II. 2.

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k(-1)^{n-k}$$

On conclut en remarquant que $b_{n+1} = \binom{n+1}{n+1}b_{n+1}(-1)^{n+1-(n+1)}$ et ainsi

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1-(n+1)}\binom{n+1}{n+1}b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

5. On a vu dans la partie I que pour $a_n = n$ on a $b_n = n2^{n-1}$. Donc en appliquant le résultat précédent on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k-1}(-1)^{n-k} = n$$

Ce qui donne finalement

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k}(-1)^{n-k} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k-1}(-1)^{n-k} = 2n$$

Exercice 14. 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. On rappelle que l'on note $\max(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i^2+n-i}{2}$$

4. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)$$

5. On note

$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$

   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq b$.

   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.

Correction 14. Pour $n = 0$ on a d'une part $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$ et $\frac{0*1*(2*0+1)}{6} = 0$ la propriété est vraie au rang 0

Montrons l'hérédité de la formule et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

et donc par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2++7n+6)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(n+1)[(2n+3)(n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

La formule est bien héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le cours : $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j = \frac{(n+i+1)(n-i)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+i+1)(n-i)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n^2-i^2+n-i}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i^2+n-i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \frac{1}{2}\left(n(n^2+n) + \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(6n+(2n+1)-3}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(8n-2)}{6}\right) \\
&= \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

`range(a,b)` renvoie la suite d'entiers de a à $b-1$.

```
k = int(input ('quelle est la valeur de k ? ))
S=0
for i in range(1,1001): #on fait une boucle for pour obtenir la somme sur i
  for j in range(1,1001): #et une deuxieme pour la somme sur j
    if i<=j:
      S=S+j**k
    else:
      S=S+i**k
print(S)
```