Table des matières

Chapitre 3 : Entiers, sommes et produits

I Notations $\sum$ et $\prod$

I. 1 *Définitions*

Définition 1. Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. Leur somme est notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ Cela correspond à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

⚠ La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ NE DEPEND PAS DE k. ⚠

On a ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$

Remarque. Si le symbole $\sum$ vous semble complexe dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, ne pas hésiter à écrire la somme en extension $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pour mieux la comprendre.

Exercice 1.
1. Calculer les quatre sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-4)$.
2. Comparer $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_{5-k}$.
3. Écrire en extension $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} a_{3k+1}$.

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:
1. $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4$.
2. $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.
3. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.
4. $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$.

Définition 2. Soit n un entier naturel et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. Leur produit est noté ....

Cela correspond à $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k =$ ....

Exemples. Calculer les produits suivants : $P_1 = \prod_{k=1}^{n} x$ et $P_2 = \prod_{j=1}^{n} (2j)$.

Exercice 3. Calculer $P_1 = \prod_{k=0}^{n} 2^k$ et $P_2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

I. 2 *Propriétés*

I. 2. a *La linéarité de la somme*

Proposition 1. Soient n un entier naturel. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels ou complexes, et soit λ un nombre réel ou complexe.

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k) =$$

⚠ C'est faux avec la multiplication et la division : $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k}$ $(b_k \neq 0)$.

I. 2. b *La relation de Chasles*

Proposition 2. Soient n un entier naturel et $p \in [\![1, n-1]\!]$.
Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

Exemples.

- $\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j$
- $\sum_{j=0}^{n+1} a_j = \sum_{j=0}^{n} a_j + a_{n+1}$

Exercice 4.

- Écrire avec une seule somme : $\sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j =$
- Simplifier les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k$.

I. 2. c Le changement d'indice

Exemples. • Transformation de $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$:

• Transformation de $\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$:

On pose $j = i+1,\ i+2,\ i-1,\ i-2, \dots$.
On doit alors :

- Regarder le nouvel ensemble de sommation
- Transformer i en $j-1$, $j-2$ $j+1$, $j+2$
- Changer les indices dans toute la somme.

Exercice 5. On pose : $S = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$. Montrer que $S = T$, puis calculer $S+T$. En déduire la valeur de S.

II Sommes usuelles

II. 1 Formalisme des récurrences

Théorème 3 (Axiome de récurrence). Si $P(n)$ est une proposition telle que :

— $P(0)$ est vraie, (ou plus généralement $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}$)

— $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$,

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (ou plus généralement $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$)

Conseil rédactionnel ♥ :

- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
  Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: ......
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  ⚠ N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
  Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1. ♡ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Initialisation : Pour $n = 0$ on a d'une part :$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$. D'autre part on a : $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$.
La propriété P est donc vraie au rang 0.

Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons le membre de gauche de l'égalité de $P(n+1)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Par hypothése de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Mettons $(n+1)$ en facteur. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)}{6}.\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}.\end{aligned}$$

Or $(2n^2+7n+6) = (2n+3)(n+2) = (2(n+1)+1)((n+1)+1)$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

□

II. 2 $\sum_{k=0}^{n} k^p$

Proposition 4.

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Plus généralement on a

$$\sum_{k=m}^{n} k^1 = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$$

Exemple Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=10}^{100} k$, $\sum_{k=10}^{100} k^2$, $\sum_{k=1}^{2^n} k^3$

II. 3 Somme géométrique

Proposition 5. Soit $q \neq 1$ on a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

II. 4 Binome de Newton

II. 4. a Coefficients binomiaux : définition et propriétés

Définition 3. Soit (n,p) deux entiers naturels.

- Si $p \in [\![0,n]\!]$, on appelle coefficient binomial, le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Par convention si $p \notin [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{p} = 0$

Exemples.

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n)!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1,\qquad \binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n,$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Remarque. Les coefficients binomiaux seront très utiles en dénombrement : $\binom{n}{p}$ est le nombre de tirages simultanés (sans ordre et sans répétition) de p boules parmi n.

Proposition 6. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

- Symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 6. Faire la preuve de la proposition (pas besoin de récurrence)

Correction

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{(n-k+1)!\,k!} \qquad \text{on met au même dénominateur} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!\,k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Proposition 7. Soit $k \in [\![0, n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En conséquence

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 7. Soit $(n, p, k, j) \in \mathbb{N}^4$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, k]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

II. 4. b Binôme de Newton

Théorème 8 (Binôme de Newton)**.**

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

III Approfondissement

III. 1 Récurrence double

III. 2 Récurrence forte

Ce type de raisonnement s'utilise quand on a une propriété $P(n)$ qui dépend de tous les $k \leq n$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$

III. 3 Somme double

III. 3. a Définition et notations

On souhaite calculer des sommes dont les termes dépendent de deux indices, par exemple : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j}$.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$ et $S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij$.

Remarque. On pourra noter ces sommes doubles à l'aide d'un seul symbole $\sum$, en indiquant en dessous comment varient les deux indices. Par exemple, on a : $S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) =$ ....

et $S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} ij =$ ....

De plus, il est toujours conseillé de représenter le domaine des indices pour lequel on effectue la somme.

III. 3. b Méthode directe

Calcul de $\sum_{i}\sum_{j} a_{ij} = \sum_{i}\left[\sum_{j} a_{ij}\right]$:

- On calcule d'abord la somme la plus intérieure (ici celle d'indice j) qui dépond ou non de i
- On calcule la deuxième somme.

Exercice 10. Calculer les sommes suivantes $S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} x^j$, $S_2 = \sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$ et $S_3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$.

III. 3. c Inversion des symboles sommes

Lorsque l'on n'arrive pas à calculer la somme la plus intérieure directement, on commence par inverser le sens des symboles somme. Il faut alors distinguer le cas d'indices liés ou non liés.

1. Indices non liés : les indices ne dépendent pas les uns des autres. On inverse sans précaution :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n'} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n'}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$$

2. Indices liés : les bornes d'un indice dépendent des autres. On fait très attention :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{ij} =$$

Car : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ 0 & \leq & j & \leq & i \end{array}\right. \iff$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} =$$

Car : $\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & i & \leq & n \\ i & \leq & j & \leq & n \end{array}\right. \iff$

Remarque. Dessiner le domaine des indices pour lequel on effectue la somme, ou représenter les positions relatives des indices sur un axe réel si l'échange d'indices liés vous paraît difficile.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x^j$.

Exercice 11. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}2^k$. Donner alors une expression simple de cette somme en intervertissant l'ordre de sommation.