TD 4 - Nombres Complexes

Entraînements

Forme algébrique

Exercice 1. Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple :

1. $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$
2. $z = (i-\sqrt{2})^3$
3. $z = \dfrac{1+4i}{1-5i}$
4. $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$
5. $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$
6. $z = \dfrac{1}{\frac{1}{i+1}-1}$
7. $z = (1+i)^{2019}$
8. $z = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$
9. $z = (5-2i)^3$
10. $z = \dfrac{1}{(4-i)(3+2i)}$
11. $z = \dfrac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$
12. $z = (\sqrt{3}-2i)^4$

Exercice 2. Soit x un réel fixé. Calculer la partie réelle et imaginaire de $(x+i)^2$ et de $\dfrac{x-3i}{x^2+1-2ix}$.

Forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 3. Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle et trigonométrique :

1. $z = -18$
2. $z = -7i$
3. $z = 1+i$
4. $z = (1+i)^5$
5. $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
6. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
7. $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$
8. $z = -5\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$
9. $z = \dfrac{1}{\frac{i}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}$
10. $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
11. $z = \dfrac{1}{1+i\tan\theta},\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
12. $z = \left(\dfrac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\right)^n,\ n\in\mathbb{N},\ \theta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice 4. Soit $t\in\mathbb{R}$. Donner l'expression du module de z_1 et z_2. Mettre z_2 sous forme exponentielle.

$$z_1 = t^2+2i\,t-1 \quad \text{et} \quad z_2 = 1-\cos t + i\sin t.$$

Exercice 5. Soit $u\in\mathbb{C}$ un complexe de module 1 et d'argument φ. Préciser le module et un argument de $1+u$.

Exercice 6.

1. Soient a et b des réels tels que b ne soit pas de la forme : $(2k+1)\pi$ avec k entier.
   Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}$.
2. Soit $(\alpha,\beta)\in[0,2\pi[^2$. Déterminer la forme exponentielle de $Z = \dfrac{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\sin\beta+i\cos\beta}$.

Exercice 7. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer j^3 et $1+j+j^2$.
2. Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\dfrac{1}{(1+j)^4}$ et $\dfrac{1}{1-j^2}$.

Applications des nombres complexes

Exercice 8. Linéariser les expressions suivantes, et en déduire une primitive dans chacun des cas.

1. $\sin^5 x$,
2. $\sin^3 x \cos^2 x$,
3. $\cos^6 x$, $\sin^6 x$,
4. $\sin^4 x \cos^3 x$,
5. $\sin^4 x \cos^4 x$.

Exercice 9.

1. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.
2. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0$
2. $2z^2(1-\cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0$
3. $\exp(z) = 3 + \sqrt{3}i$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^2 = i$
2. $z^3 = i$
3. $z^4 + 4 = 0$
4. $z^2 = 3 - 4i$
5. $z^4 = j$ (on rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^n = (z-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$
2. $(z+1)^n = (z-1)^n$

Type DS

Exercice 13. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Justifier que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.
5. Montrer alors que la partie imaginaire de A est strictement positive.
6. Prouver par récurrence que pour tout $q \neq 1$, et tout $n \in \mathbb{N}$: on a :
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
7. Montrer alors que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
8. Montrer que $AB = 2$.
9. En déduire la valeur exacte de A.