Correction TD 5.1 - Suites usuelles

Entraînements

Exercice 1. Calculer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_{n+1} = u_n + 3$
2. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$
3. $u_{n+1} = u_n - 5$
4. $u_{n+1} = 3u_n$
5. $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
6. $u_{n+1} = -5u_n$
7. $u_{n+1} = 3u_n + 3$
8. $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + \frac{1}{3}$
9. $u_{n+1} = -u_n - 4$

Correction 1.

1.
   - C'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 3n.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + 3\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + 3\frac{n(n+1)}{2}$.
2.
   - C'est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + \frac{n}{2}.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{4}$.
3.
   - C'est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 - 5n.$$
   - Elle diverge vers $-\infty$.
   - $S = 2(n+1) - 5\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2}$.
4.
   - C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 23^n.$$
   - Comme $3 > 1$, la suite diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} - 1$.

5.
- C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
- Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite converge vers 0.
- $S = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

6.
- C'est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-5)^n.$$
- Comme $-5 < -1$, la suite n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.
- $S = 2\sum_{k=0}^{n}(-5)^k = \frac{1}{3}\left(1-(-5)^{n+1}\right)$.

7.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{7}{2}\times 3^n - \frac{3}{2}$.
- Comme $3 > 1$, elle diverge vers $+\infty$.
- $S = \frac{7}{4}\left(3^{n+1}-1\right) - \frac{3(n+1)}{2}$.

8.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{9}$.
- Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, elle converge vers $\frac{2}{9}$.
- $S = \frac{32}{27}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2(n+1)}{9}$.

9.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4(-1)^n - 2$.
- Elle n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.
- $S = 2\left(1-(-1)^{n+1}\right) - 2(n+1)$.

Exercice 2. Déterminer en fonction de n, le terme u_n des suites qui vérifient

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 2,\ u_1 = -3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$.
4. $u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \forall n \geq 3,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
5. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -4u_n$.

Correction 2. Toutes ces suites sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux, on les résout en étudiant l'équation caractéristique. Je ne donne ici que le résultat.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\left(3^{n+1} + (-1)^n\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \frac{5}{4}n\right)(-4)^n$
4. Suite de Fibonacci, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$

Exercice 3. Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de n :

1. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n}u_n$
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^3$

Correction 3. Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}nu_1 = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}n.$
2. Méthode 1 : on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 2^3 \times 2^{3^2} \times \cdots \times 2^{3^{n-1}}u_0^{3^n} = 2^{\sum_{k=0}^{n} 3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$ et on fait une récurrence.
   Méthode 2 : on pose $u_n = 2^{v_n}$, et on essaye de calculer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u_0 = 2 = 2^1$, donc $v_0 = 1$. De plus, on a :
   $$u_{n+1} = 2(u_n)^3 \Leftrightarrow 2^{v_{n+1}} = 2 \times (2^{v_n})^3 \Leftrightarrow 2^{v_{n+1}} = 2^{3v_n+1} \Leftrightarrow v_{n+1} = 3v_n + 1.$$
   On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite $v_n = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$, soit $u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$.

Type DS

Exercice 4. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0 \quad v_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne les valeurs de u_n et v_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 12u_n$$
3. Déterminer les solutions de $x^2 - 6x + 12 = 0$ et les mettre sous formes exponentielles.
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Correction 4. 1.
```
def suite(n):
    u,v=0,1
    for i in range(n):
        u,v=2*u-4*v, u+4*v
    return(u,v)
```

2. Avec la definition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient bien l'égalité demandée :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - 4v_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - 4(u_n + 4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (-4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (u_{n+1} - 2u_n) \\ &= 6u_{n+1} - 12u_n \end{aligned}$$

3. Le discriminant de $X^2 - 6X + 12$ est $\Delta = 36 - 48 = -12$, le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{6 + i\sqrt{12}}{2}$$
qui se simplient en
$$r_1 = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = 3 + i\sqrt{3}$$
Leur module vaut $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et on a donc
$$\begin{aligned} r_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6} \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{r_1 = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6} \quad \text{et} \quad r_2 = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}}$$

4. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Le cours nous dit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout n on a :
$$u_n = A(2\sqrt{3})^n \cos(\frac{\pi n}{6}) + B(2\sqrt{3})^n \sin(\frac{\pi n}{6})$$
Il suffit maintenant de déterminer A et B à l'aide des valeurs de u_0 et u_1. u_0 est donné dans l'énoncé et u_1 se calcule facilement avec la relation définissant u_n :
$$u_1 = 2u_0 - 4v_0 = -4$$
On obtient alors le système :
$$\left\{\begin{array}{ccc} A & = & u_0 \\ A(2\sqrt{3})\cos(\frac{\pi}{6}) + B(2\sqrt{3})\sin(\frac{\pi}{6}) & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B\sqrt{3} & = & -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B & = & \frac{-4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$
$$\boxed{u_n = \frac{-4\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3})^n \sin(\frac{\pi n}{6})}$$