Chapitre 5.1 - Suites réelles 4 exemples

I Suite arithmétique

Définition 1. Définition d'une suite arithmétique :
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k =$

II Suite géométrique

Définition 2. Définition d'une suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q

$$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n =$
- Limite (pour $u_0 > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

III Suite arithmético-géométrique

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Étude d'une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$.
  - ⋆ Chercher α tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique de raison a.
  - ⋆ En déduire son expression explicite de v_n
- Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \alpha$.

Remarque. ⚠ Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n. La suite $u_{n+1} = nu_n + 3$ n'est pas arithmético-géométrique. La méthode présentée ensuite ne fonctionne pas.

Exemple 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n.

1. **Chercher α tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique de raison a.**

2. **Expression de $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**

3. **Retour à la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**

IV Suite récurrente linéaire d'ordre deux

Définition 4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec deux conditions initiales données (u_0 et u_1).

- Résolution de l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(E) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Expression explicite de la suite selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique :
  - ⋆ Si $\Delta > 0$: (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et l'expression explicite de la suite est :

    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

  - ⋆ Si $\Delta = 0$, (E) a une solution réelle double r_0, et l'expression explicite de la suite est :

    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

  - ⋆ Si $\Delta < 0$: (E) a deux solutions complexes conjuguées que l'on écrit sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). L'expression explicite de la suite est alors :

    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

- Calcul des constantes α et β à l'aide des valeurs des conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exemple 2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

1. **Résolution de l'équation caractéristique**

2. **Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec constantes à déterminer**

3. **Calcul des constantes**