Correction TD 5.2 - Suites réelles

Entraînements

Exercice 1. Étudier la monotonie des suites définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Correction 1. Étude de la monotonie des suites suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - (n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plutôt de type produit. Comme tous ses termes sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n!} = \frac{n+1}{2}.$$
Un calcul rapide donne
$$\frac{n+1}{2} < 1 \Leftrightarrow n+1 < 2 \Leftrightarrow n < 1.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante ou encorrectione la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n = f(n)$ avec
$$f :\ x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$
L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1, +\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$
Étudions le signe de $1 - \ln x$ ($x^2 \geq 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1 - \ln x$) : $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5. On remarque que

$$u_{n+1}-u_n = n+1+2(-1)^{n+1} - n - 2(-1)^n = 1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1} = 1+4(-1)^{n+1}.$$

Ainsi, si $n=2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p} = 5 > 0$ et si $n=2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1} = -3 < 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2. Étudier le comportement en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
4. $u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$
6. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
8. $u_n = \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$
9. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
10. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$
11. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
12. $u_n = \dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$
13. $u_n = \ln(2^n+n)$
14. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
15. $u_n = (\ln n)^n$
16. $u_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$
17. $u_n = (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}$
18. $u_n = \dfrac{1}{a^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k$
19. $u_n = n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$

Correction 2. Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = +\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0)=1$.

2. On a ici une forme indéterminée avec une différence de racines. L'idée est d'utiliser la quantitée conjuguée :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Par quotient de limites, on obtient donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0.$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\ln(n^2) = -\infty$ en utilisant $\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.

4. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).
5. $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n}{2^n}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n=e^{n\ln 2}$.
6. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$ par le théorème des gendarmes et que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^3)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\ln(n)}{n}=0$ par croissance comparée.
7. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}$ en écrivant que $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
8. $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-4^n}{3^n+4^n}=-1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.
9. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ en utilisant un correctionollaire du théorème des gendarmes car $\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$ ou le théorème des gendarmes.
10. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0\leq\frac{1+(-1)^n}{n}\leq\frac{2}{n}$.
11. $\lim_{n\to+\infty}n^2-n\cos n+2=+\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le correctionollaire du théorème des gendarmes avec $\left|\frac{\cos n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$.
12. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=0$ en utilisant la définition des factorielles.
13. $\lim_{n\to+\infty}\ln(2^n+n)=+\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.
14. $\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ car $n^{1/n}=e^{1/n\ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.
15. $\lim_{n\to+\infty}(\ln n)^n=+\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire que $(\ln n)^n=e^{n\ln(\ln n)}$.
16. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n}{3^n}=0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^{n\ln 2}}=0$.
17. $\lim_{n\to+\infty}(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}=1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :

$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}=e^{1/n\ln(n^2+n+1)}.$$

Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors

$$\frac{\ln(n^2+n+1)}{n}=\frac{\ln(n^2)}{n}+\frac{\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n}.$$

On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

18. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n}b^k$.
On suppose ici que $a>0$ et $b>0$. Commençons par calculer l'expression dont on cherche la limite. On obtient, si $b\neq 1$

$$\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n}b^k=\frac{b}{1-b}\frac{1-b^n}{a^n}.$$

Et si $b=1$, on obtient $\dfrac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k = \dfrac{n}{a^n}$. Etudions alors des cas :

- ⋆ Si $b>1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-b}{1-b}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} -b^n$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $b<a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
  Si $b=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-b}{1-b}$
  Si $b>a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $0<b<1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{1-b}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent.. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
  Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-b}$
  Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $b=1$:
  On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{a^n}$. Ainsi, on obtient les cas suivants :
  Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par croissance comparée
  Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

19. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times\left(-\dfrac{1}{2n^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. Calculer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = e^{n^2+n+1}$
2. $u_n = e^{2n} - e^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n+n^2+n+1}{e^{2n}+1}$
4. $u_n = \dfrac{n}{n-1}e^{\frac{1}{n}}$
5. $u_n = e^{n^2} - e^{n+1}$
6. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^n+1}{e^n-1}\right)$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^n+n^2}{2n+1}\right)$
8. $u_n = \ln\left(\dfrac{2-n}{n+4}\right)$
9. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2+1}$
10. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln n$
11. $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}$
12. $u_n = e^n - n^{\frac{2}{3}}$
13. $u_n = e^{\frac{1}{n-2}}$
14. $u_n = (2n-1)e^{\frac{1}{n-2}}$
15. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n}$

Correction 3. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. $\mathbf{u_n = e^{n^2+n+1}}$:
   - Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $\mathbf{u_n = e^{2n} - e^n}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2n}. On obtient que : $u_n = e^{2n}(1-e^{-n})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. $\mathbf{u_n = \dfrac{e^n+n^2+n+1}{e^{2n}+1}}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^n) et au dénominateur e^{2n}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. $\mathbf{u_n = \frac{n}{n-1}e^{\frac{1}{n}}}$:

   - Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. $\mathbf{u_n = e^{n^2} - e^{n+1}}$:

   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{n^2}. On obtient que $u_n = e^{n^2}(1 - e^{-n^2+n+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+n+1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. $\mathbf{u_n = \ln\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}$

   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n. On obtient alors $u_n = \ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. $\mathbf{u_n = \ln\left(\frac{e^n+n^2}{2n+1}\right)}$

   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n au numérateur et n au dénominateur. On obtient que : $u_n = \ln\left(\frac{e^n}{n} \times \frac{1+\frac{n^2}{e^n}}{2+\frac{1}{n}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8. $\mathbf{u_n = \ln\left(\frac{2-n}{n+4}\right)}$: Pas définie pour $n > 2$!

9. $\mathbf{u_n = \frac{2^n}{n^2+1}}$:

   - FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur n^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $u_n = \frac{e^{\ln 2n}}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\ln 2n}}{n^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

10. $\mathbf{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln n}$

    - FI car $u_n = \ln(n)e^{-n\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par n. On obtient que : $u_n = \frac{n}{e^{\ln 2n}} \times \frac{\ln n}{n}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{\ln 2n}} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

11. $\mathbf{u_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}}$

    - FI donc on transforme l'enpression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par enemple $n = \sqrt{n}$ et on obtient que $u_n = u_n = \frac{e^n}{n^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

12. $\mathbf{u_n = e^n - n^{\frac{2}{3}}}$:

- FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^n. On obtient que : $u_n = e^n\left(1-\dfrac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n}\right)$.

  Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n}=0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

13. $\mathbf{u_n = e^{\frac{1}{n-2}}}$
    - $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$
14. $\mathbf{u_n=(2n-1)e^{\frac{1}{n-2}}}$:
    - $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
15. $\mathbf{u_n=\dfrac{\ln(n^2+1)}{n}}$
    - FI donc on met en facteur le terme dominant n^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $u_n=2\dfrac{\ln n}{n}+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n}=0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Type DS

Exercice 4. Suites homographiques.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{5u_n-2}{u_n+2} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n\geq 3$, $u_n>1$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 4.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n\geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n défini et $u_n>1$.
   - Initialisation : pour $n=3$:
     On a : $u_1=-1$ puis $u_2=-7$ et $u_3=\dfrac{37}{5}>1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n\geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n>1$, donc $u_n-1\neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a

     $$u_{n+1}>1 \Leftrightarrow \frac{5u_n-2}{u_n+2}>1 \Leftrightarrow 5u_n-2>u_n+2 \Leftrightarrow u_n>1.$$

     Ici on a utilisé le fait que $u_n>1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n+2>0$. On arrive $u_n>1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1}>1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n\geq 3,\ u_n>1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n\geq 3, u_n>1$. Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a bien $u_n-1\neq 0$ et v_n bien défini.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.
4. On en déduit la formule explicite de v_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
En remarquant que : $u_n(v_n-1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n-2}{2(\frac{3}{4})^n-1}.$$
5. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Exercice 5. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \end{cases}$$

1. Calculer $1-u_{n+1}$ en fonction de $1-u_n$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, en fonction du premier terme u_0.

Correction 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1-u_{n+1} = 1+u_n^2-2u_n = (1-u_n)^2$.
2. On pose $v_n = 1-u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad v_n = v_0^{2^n}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
   On a : $v_0^{2^0} = v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient
   $$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

   On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1-(1-u_0)^{2^n}$.
   - Si $1-u_0 > 1 \Leftrightarrow u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   - Si $u_0 = 0$, alors $1-u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $-1 < 1-u_0 < 1 \Leftrightarrow 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   - Si $u_0 = 2$, alors $1-u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Si $1-u_0 < -1 \Leftrightarrow u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty}(1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 6. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Correction 6. On définit deux suites $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\mathbf{u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}}.$$

1. **On pose, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{w_n = v_n - u_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{w_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
   $$w_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} - \frac{u_n+2v_n}{3} = \frac{v_n-u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$
   Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
   $$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$
2. **Montrer que $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes :**
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n-u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
     Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n-v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leq 0.$$
     Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

- Montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.
Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$

3. **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{t_n = 3u_n + 8v_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{t_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   - Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
   Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi
   $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
   - Calcul de la valeur de la limite l :
   Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite l et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11l$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n + 8v_n = 99$, on obtient donc que
   $$11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9.}$$

Exercice 7. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.

Correction 7. Soient $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\mathbf{a_0 = 0}$, $\mathbf{b_0 = 1}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{a_{n+1} = -2a_n + b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 3a_n}.$$

1. **Démontrer que la suite $(\mathbf{a_n + b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est constante :**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n.$$
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{a_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique .
   - Calcul de la limite éventuelle : on résout : $l = 1 - 3l \Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$.
   - Étude d'une suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n - \frac{1}{4}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3a_n - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = -3v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$. On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = -\frac{1}{4}(-3)^n$.

- Expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = v_n + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n :**
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$

Exercice 8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et deux flottants (a, b) et retourne la valeur de u_n.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante.
5. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \geq y > 0$ on a
$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x - y)$$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
8. INFO On note ℓ la limite commune des deux suites. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant `eps` et retourne la valeur de ℓ à `eps` prés.

Correction 8.

1.
```
from math import sqrt
def suite_u(n,a,b):
  u=a
  v=b
  for i in range(n):
    u,v=sqrt(u*v), (u+v)/2 #affectation simultanee
  return(u)
```

2. On va procéder par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\
\iff & xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad \text{car} x + y > 0 \\
\iff & xy \leq \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4} \\
\iff & 4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy \\
\iff & 0 \leq x^2 + y^2 - 2xy \\
\iff & 0 \leq (x - y)^2
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et comme on a procédé par équivalence on a bien pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$\boxed{\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

3. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $0 \leq u_n \leq v_n$ ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé $0 < a < b$.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ qui est bien défini car u_n et v_n sont positifs par hypothèse de récurrence. Cette expression assure aussi que u_{n+1} est positif.
   De plus,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} && \text{Par définition.} \\ &\geq 0 && \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$
   Ainsi $v_{n+1} \geq u_{n+1}$ La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion :
   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:
   $$\boxed{0 \leq u_n \leq v_n}$$
4. On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ Or comme $u_n \leq v_n$ et que la fonction racine est croissante on a
   $$u_{n+1} - u_n \geq 0$$
   $$\boxed{\text{Autrement dit } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$
   On a $v_n + 1 - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ Or comme $u_n \leq v_n$ on a
   $$v_{n+1} - v_n \leq 0$$
   $$\boxed{\text{Autrement dit } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$
5. On va procéder par équivalence :
   $$\begin{aligned} & \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x-y) \\ \Longleftrightarrow & y \leq \sqrt{xy} \\ \Longleftrightarrow & y^2 \leq xy && \text{car } y \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & y \leq x && \text{car } y > 0 \end{aligned}$$
   Cette dernière inégalité étant vérifiée par hypothèse et comme on a procédé par équivalence on a bien pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $0 \leq y \leq x$
   $$\boxed{\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x-y)}$$
6. Montrons par récurrence la propriété définie $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie car le terme de gauche vaut $v_0 - u_0$ et le terme de droite vaut $\frac{1}{1}(v_0 - u_0)$.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

On applique l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0) \end{aligned}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).}$$

```
from math import sqrt, abs
def limite(eps,a,b):
    u=a
    v=b
    while abs(u-v)>eps:
        u,v=sqrt(u*v), (u+v)/2
    return(u)
```