Table des matières

Chapitre 5.2 - Suites réelles

I Principales propriétés sur les suites

Définition 1. Définition d'une suite :

- Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
- Pour désigner les valeurs prises par la suite, on note u_n à la place de $u(n)$.
- Pour désigner la suite globale, on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la suite de terme général u_n.

Remarque. Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang.
Exemple : ....
Plus généralement, on note .... la suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0.

⚠ Ne pas confondre ....

Représentation graphique d'une suite On peut représenter graphiquement une suite réelle en portant en abscisse les entiers naturels et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points qui décrivent l'évolution de la suite.

Exemple 1. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

I. 1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si ....

Exercice 1.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si ....

Exercice 2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée par 0 et 1.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\ln 2$. On pourra utiliser après l'avoir démontrée l'inégalité suivante : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

Cas particulier des suites définies explicitement $u_n = f(n)$ L'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ permet d'obtenir les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. Majoration, minoration.

- Si la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
- Si la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée
- Si la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

I. 2 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si ....

⚠ Il existe plein de suites qui ne sont ....
Exemple : ....

I. 2. a Méthodes

❶ **Étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:**

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 3. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 2n$.

(b) La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

❷ Comparaison de $\mathbf{u_{n+1}/u_n}$ avec 1 si les termes de la suite sont strictement positifs :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 4. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^2}{n!}$.

(b) La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 5.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3^{-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-1-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.

Exercice 6. Soit f une définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dérfinie par $u_n = f(n)$. Montrer que
- Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 7. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-n}$.

II Limites

II. 1 Suites monotones

Ce théorème est vraiment très important, on l'utilise très souvent.

Théorème 2. Théorème sur les suites monotones

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Exercice 8. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. Montrer que la suite est bornée par $\frac{1}{2}$ et 1. Étudier sa monotonie, puis conclure sur sa convergence.

Exercice 9. Étudier l'éventuelle convergence des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.

II. 2 Encadrement

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 3. Théorème des gendarmes :
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple 2. Étudier le comportement de la suite $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

Correction On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \,|\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 10.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

II. 3 Passage à la limite

Théorème 4. Soit f une fonction réelle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$$

Théorème 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq v_n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ alors

$$\ell \leq \ell'$$

II. 4 Suites adjacentes

Définition 4. Définition de deux suites adjacentes :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 6. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.
Alors les suites convergent et ont même limite.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Correction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} && < 0
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$

Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.

II. 5 Croissances comparées

Théorème 7. Croissances comparées :
Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On a :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\gamma}}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{n\gamma}} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$:

$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << e^{n\gamma} << n! << n^n.$$