

TD 5.3 - Suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Entraînements

Exercice 1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{(1 + u_n)^2}{4}$.

Exercice 2. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

Exercice 3. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = e^{u_n}$.

Type DS

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. On suppose que $u_0 > 2$.
 - (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 2$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. On suppose que $u_0 \in \left] \frac{2}{3}, 2 \right[$.

- (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in \left] \frac{2}{3}, 2 \right[$.
- (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \end{cases}$$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$?
5. On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.
 - (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in]0, 3[$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. On suppose que $u_0 > 3$.
 - (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 3$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_0 < 0$.
 - (a) Montrer que $u_1 > 3$.
 - (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.