Correction TD 5.3 - Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Entraînements

Exercice 1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{(1+u_n)^2}{4}$.

Correction 1. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \dfrac{(1+x)^2}{4}$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1+x}{2}.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant
   $$l = f(l) \Leftrightarrow l = 1.$$
   Ainsi, 1 est la seule limite éventuelle de la suite.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   On remarque que $[0,1]$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = 0 \in [0,1]$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$
4. Étude de la monotonie de la suite :
   La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0,1]$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
   $$u_1 = \frac{1}{4} > u_0.$$
   Ainsi, un raisonnement par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. De plus, comme la seule limite éventuelle est 1, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

Correction 2. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Un calcul rapide montre qu'il n'y a pas de limite éventuelle.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   On remarque que $[0, +\infty[$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = \frac{1}{2} \in [0, +\infty[$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$
4. Étude de la monotonie de la suite :
   La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0, +\infty[$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
   $$u_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} > u_0.$$
   Ainsi, un raisonnemnt par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, on montre par un raisonnement rapide par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

Exercice 3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = e^{u_n}$.

Correction 3. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto e^x$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Étudions alors la fonction $g:\ x \mapsto g(x) = f(x) - x$. L'étude d'une telle fonction donne que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 1.$$
   En particulier, il n'y a pas de valeur d'annulation de g et donc il n'y a pas de limite éventuelle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   $\mathbb{R}^+$ est un intervalle stable par f et $u_1 > 0$. Ainsi, on montre par récurrence que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n \geq 0$. (On ne commence pas au rang 0 car $u_0 \in \mathbb{R}$).
4. Étude de la monotonie de la suite :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 1 > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Étude de la convergence de la suite :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, par un raisonnement par l'absurde, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

Type DS

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose que $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 4.

1. **Étudier les variations de la fonction** $f : x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$ **associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3}{2}x - 2$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3$:**
   Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 2. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 2.}$
3. **Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On a donc :
     - ∘ La suite converge vers l.
     - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

     Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
   - ⋆ De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
   - ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$
   - ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 2$.
     $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 2.}$
4. **On suppose que $u_0 > 2$:**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $[2, +\infty[$, et $f(2) = 2$. Donc pour tout $x \in [2, +\infty[, f(x) > 2$ et l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f.
   On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 2$.
   - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 > 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 2$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 2.}$

   (b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
   - ⋆ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
     - ∘ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
     - ∘ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

     D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 2$. Ainsi on obtient que : $l > 2$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$
5. **On suppose que $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$:**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $\left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f. Attention, ici f

n'est pas monotone sur $\left]\frac{2}{3},2\right[$, il faut donc traiter les deux intervalles $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$ et $\left]\frac{4}{3},2\right]$ séparemment.
Sur $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$, $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3}$. Donc pour tout $x\in\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, $f(x)\in\left[\frac{5}{3},2\right[$, donc $f(x)\in\left]\frac{2}{3},2\right[$.
Sur $\left]\frac{4}{3},2\right]$, f est strictement croissante et $f(2)=2$, $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3}$. Donc pour tout $x\in\left]\frac{4}{3},2\right]$, $f(x)\in\left]\frac{5}{3},2\right]$, donc $f(x)\in\left]\frac{2}{3},2\right[$.
En en déduit que pour tout $x\in\left]\frac{2}{3},2\right[$, on a bien $f(x)\in\left]\frac{2}{3},2\right[$: l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f.
On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n\in\left]\frac{2}{3},2\right[$.

- ⋆ Initialisation : pour $n=0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0\in\left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n\in\left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  De plus, $u_n\in\left]\frac{2}{3},2\right[$. Or l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f. Donc $f(u_n)\in\left]\frac{2}{3},2\right[$ c'est-à-dire $u_{n+1}\in\left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left]\frac{2}{3},2\right[.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n\geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 2, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 2.}}$

Exercice 5. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3 \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x\mapsto f(x)-x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0=3$ ou $u_0=0$?
5. On suppose que $u_0\in]0,3[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in]0,3[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que $u_0>3$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n>3$.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. On suppose que $u_0 < 0$.

   (a) Montrer que $u_1 > 3$.

   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 5.

1. **Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2}{3}x - 1$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

   - Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$:**
   Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 3. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 3.}$

3. **Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On a donc :
     - ∘ La suite converge vers l.
     - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

     Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
   - ⋆ De plus on a : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
   - ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$
   - ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 3$.

     $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 3.}$

4. **Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$? :**
   - Cas 1 : si $u_0 = 3$:
     Comme 3 est le point fixe de f, on a : $u_1 = f(u_0) = f(3) = 3$ puis $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$... On montre alors par récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$
   - Cas 2 : si $u_0 = 0$:
     On a par définition de la suite : $u_1 = f(u_0) = f(0) = 3$. Mais comme 3 est le point fixe de la fonction f, on a alors $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$ puis $u_3 = f(u_2) = f(3) = 3$... On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$

5. **On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0,3[$:**
On peut commencer par montrer que l'intervalle $]0,3[$ est stable par f. On traite ici les intervalles $\left]0, \frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$ séparemment.
La fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{3}{2}\right]$, et $f(0) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in \left]0, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right]$, donc $f(x) \in]0,3[$.
La fonction f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$, et $f(3) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right[$, $f(x) \in \left]\frac{9}{4}, 3\right]$, donc $f(x) \in]0,3[$.
Ainsi, pour tout $x \in]0,3[$, $f(x) \in]0,3[$, et donc l'intervalle $]0,3[$ est stable par f.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in]0,3[$.

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
  Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 \in]0,3[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0,3[$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0,3[$. Or l'intervalle $]0,3[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in]0,3[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in]0,3[$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,3[.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 3, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 3.}$

6. **On suppose que $u_0 > 3$.**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$:**
On peut commencer par montrer que l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $]3, +\infty[$, et $f(3) = 3$, donc pour tout $x \in]3, +\infty[$, $f(x) > 3$ et l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f.

- ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ u_n \text{ existe et } u_n > 3.$$

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
  Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 > 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. Or l'intervalle $]3, +\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 3$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 3$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- $\star$ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 3.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- $\star$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
- $\star$ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
  - $\circ$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
  - $\circ$ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

  D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 3$. Ainsi on obtient que : $l > 3$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

7. **On suppose que $u_0 < 0$.**

(a) **Montrer que $u_1 > 3$:**
On a :

- $\star$ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction polynomiale.
- $\star$ La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
- $\star$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 3$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f(]-\infty, 0[) =]3, +\infty[$. Or on a supposé que $u_0 \in]-\infty, 0[$ donc $f(u_0) \in]3, +\infty[$, à savoir $u_1 \in]3, +\infty[$. Donc on a bien $\boxed{u_1 > 3.}$

(b) **En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ a donc un terme initial $u_1 > 3$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ se comporte comme la suite de la question 5 et en particulier elle diverge vers $+\infty$. Mais le comportement à l'infini d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$