Chapitre 5.3 - Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Ce type de suite est très souvent étudié en biologie (dynamique des populations, mutation de l'ADN...), en physique (mécanique céleste) en math évidemment, mais aussi en finance, en météorologie...

L'étude est assez similaire pour toutes ces suites et nous allons regarder en détail l'exemple suivant :

Sur l'exemple suivant :

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Montrer que $I_1 = [-1, 1]$, $I_2 = [1, 2]$ et $I_3 = [2, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
3. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
4. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?
6. On suppose que $u_0 \in]-1, 1[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]-1, 1[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_1 \in [1, 2]$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [1, 2]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ Les suites sont de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ il n'y a pas n comme variable dans f : par exemple la suite $u_{n+1} = u_n^2 + n$ ne rentre pas dans le cadre de cette étude.

⚠ Attention à la confusion entre les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et les suites sous forme $u_n = f(n)$. Ici on s'intéresse au premier cas. Le cas $u_n = f(n)$ est "simple", la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se comporte comme la fonction f et il suffit d'étudier f.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée, c'est-à-dire la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$.

   ⚠ Cette étude ne nous dit pas énormément de choses sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le sens de variation de f et celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas reliés.

Définition 1. Soit f une fonction réelle, soit I un intervalle. On dit que I est stable par f si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in I$

2. Montrer que $I_1 = [-1, 1]$, $I_2 = [1, 2]$ et $I_3 = [2, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.

3. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.

   Remarque Cette fonction g est particulièrment intéressante, car elle nous permettra de donner le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Remarque Question ultra classique. ⚠Ici on NE dit PAS que la suite converge, on dit " SI elle converge alors sa limite peut valoir ***" Pour trouver les limites possibles il faut passer à la limite dans l'équation définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les limites possibles correspondent alors aux valeurs ℓ pour lesquelles $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

   Souvent la valeur de u_0 est donnée et il suffit de faire l'étude dans ce cas. Ici on va voir qu'en fonction de la valeur de u_0 il se passe des choses différentes.

5. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?

6. On suppose que $u_0 \in]-1,1[$.

   Remarque Avec la question 4, les questions suivantes forment le coeur de l'étude des

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]-1,1[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. On suppose que $u_1 \in [1,2]$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [1,2]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.