TD 6 : Systèmes linéaires

Entraînements

Systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 1. Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1. $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5a + b + 2c = 13 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ a - b + c = 2 \\ 3a + b + c = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y + z - u - v = 0 \\ x - y - z - u + 2v = 0 \\ -x + 2y + 3z + u - v = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x + 2y + z - 4t = 4 \end{cases}$

Systèmes linéaires avec paramètre

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2z = \lambda x \\ y + z = \lambda y \\ x + y + 3z = \lambda z \end{cases}$$

Exercice 4. Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases}$

Divers

Exercice 5. Soit la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, 5x+3y). \end{array} \right.$$

Montrer que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y.

Remarque : on dit que f est bijective. La fonction qui à (X,Y) associe l'expression trouvée pour (x,y) est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1}. On peut vérifier que $f^{-1}(f(x,y)) = (x,y)$ et que $f(f^{-1}(X,Y)) = (X,Y)$.

Exercice 6. Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$H_2SO_3 + HBrO_3 \to H_2SO_4 + Br_2 + H_2O.$$

Exercice 7. La somme des carrés.

1. Trouver un polynôme de degré 3 tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
2. Retrouver alors l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 8. On considère les points $A = (1,2,-1)$ et $B = (-2,4,0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB).
2. En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$ représentée paramétriquement par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = s+3 \\ y = -2s+2 \\ z = 2s+m \end{array} \right. ; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Type DS

Exercice 9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y & = & \lambda x \\ x+3y & = & \lambda y \end{array} \right.$$

1. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
2. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
3. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Exercice 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & -y & +z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$?