TD 7 - Vocabulaires des Applications

Entraînements

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.

Correction 1.

1. **Étude de la fonction f :**
   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale.
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   Les limites en l'infini s'obtiennent en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré.
2. **Déterminons $\mathbf{f([1,2])}$, $\mathbf{f(\mathbb{R})}$, $\mathbf{f([-1,+\infty[)}$:**
   La recherche d'images directes se fait le plus souvent en utilisant le théorème de la bijection.
   (a) Déterminons $f([1,2])$.
   On peut par exemple utiliser le théorème de la bijection.
   - f est continue sur $[1,2]$.
   - f est strictement croissante sur $[1,2]$.
   - $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

   Ainsi, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[-2,2]$ et donc
   $$\boxed{f([1,2]) = [-2,2].}$$
   (b) Il faut ici appliquer le théorème de la bijection sur chaque intervalle où f est strictement monotone, à savoir sur les intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$. On montre ainsi que $\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$ et en particulier cela nous donne que la fonction f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Là encore, en appliquant le théorème de la bijection sur les deux intervalles suivants $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$ où la fonction f est strictement monotone, on obtient $\boxed{f([-1,+\infty[) = [-2,+\infty[.}$

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe associe son module.
Calculer l'image directe par f de :

1. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = x + 2i\}$
2. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = (1 + \cos(x)) + i\sin(x)\}$.

Correction 2.

1. (a) **Calcul de $\mathbf{f(A)}$ avec $\mathbf{A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = x + 2i\}}$:**
Par définition d'une image directe par une application, on sait que $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists z \in A,\ y = f(z)\}$. Et par définition de l'application f, on obtient que : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists z \in A,\ y = |z|\}$. Puis par définition de l'ensemble A, on a : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = |x + 2i|\} = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = \sqrt{x^2+4}\} = \{\sqrt{x^2+4},\ x \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty[$. Il suffit en effet d'étudier la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ pour obtenir que $g(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$.

(b) **Calcul de $\mathbf{f(A)}$ avec $\mathbf{A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = (1 + \cos(x)) + i \sin(x)\}}$:**
Par définition d'une image directe par une application, on sait que $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists z \in A,\ y = f(z)\}$. Et par définition de l'application f, on obtient que : $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists z \in A,\ y = |z|\}$. Puis par définition de l'ensemble A, on a :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = |1 + \cos x + i \sin x|\} = \left\{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = \sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right\} = \left\{y \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = 2\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right\} = [0,2] \end{aligned}$$

car $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ prend toutes les valeurs possibles entre 0 et 1 car $\boxed{f(A) = [0,2].}$

2. (a) **Calcul de $\mathbf{f^{-1}(B)}$ avec $\mathbf{B = [-1, 1]}$:**
Par définition de l'image réciproque d'une application, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(z) \in B \ \Leftrightarrow\ |z| \in [-1,1] \ \Leftrightarrow\ -1 \leq |z| \leq 1.$$

La première inégalité étant toujours vraie, on a $f^{-1}(B) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$: l'ensemble $\boxed{f^{-1}(B) \text{ est donc le disc}}$

(b) **Calcul de $\mathbf{f^{-1}(B)}$ avec $\mathbf{B = \mathbb{R}_+^\star}$:**
Par définition de l'image réciproque d'une application, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 0$, ce qui correspond aux complexes non nuls. Ainsi $\boxed{f^{-1}(B) = \mathbb{C}^\star}$.

Exercice 3. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$
3. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}\right.$
4. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}\right.$
5. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$
6. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$
7. $f : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$
8. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}\right.$
9. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}\right.$
10. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}\right.$
11. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array}\right.$
12. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}\right., n \in \mathbb{N}^\star$
13. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array}\right.$
14. $f : \left|\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}\right.$
15. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-4,+\infty[\\ x & \mapsto & 2^x - 4 \end{array}\right.$
16. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x) + \sin(x) \end{array}\right.$
17. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}\right.$

Correction 3. Commencer par tracer les graphes des courbes pour conjecturer les résultats.

1. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ **:**
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc f est injective. On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective, et donc f n'est pas bijective.

2. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ **:**

   On peut ici conjecturer que f est bijective. Comme on doit calculer la bijection réciproque, on raisonne par analyse-synthèse :

   - Analyse : soit $y \in \mathbb{R}^+$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
   $$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2,$$
   car on a $y \geq 0$.
   - Synthèse : $\forall y \in \mathbb{R}^+$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = y^2$ dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, et on a $f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & y^2 \end{array}\right.$.

3. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}\right.$ **:**

   La fonction f est strictement croissante, donc f est injective. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Or $-1 < 0$, donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution de $\mathbb{R}^+$, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

4. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}\right.$ **:**

   On raisonne par analyse-synthèse :

   - Analyse : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$f(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y \Leftrightarrow x = y - 1,$$
   car on a $y \geq 0$.
   - Synthèse : $\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = y - 1$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on a $f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y-1 \end{array}\right.$.

5. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$ **:**

   On a $f(x) = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$, donc 1 admet deux antécédents par f et f n'est pas injective. On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow |x| = -1$ qui n'a pas de solution, donc -1 n'a pas d'antécént et f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

6. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$ **:**

   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc f est injective. Mais comme précédemment, -1 n'a pas d'antécédent, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

7. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$ **:**

   Comme précédemment, 1 a deux antécédents par f donc f n'est pas injective ($|1| = |-1|$). Donc f n'est pas bijective.

   Soit $y \in [0,1]$: on a $f(x) = y \Leftrightarrow |x| = y \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$ avec $y \in [-1,1]$ et $-y \in [-1,1]$, donc y admet deux antécédents dans $[-1,1]$, et f est surjective.

8. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}\right.$ **:**

   Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x}.$$

On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt[3]{y} \end{cases}$.

9. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{cases}$ **:**

   On a $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. On a $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^4 = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

10. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{cases}$ **:**

    Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}^+$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

    $$f(x) = y \Leftrightarrow x^4 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{x} \text{ car } x \geq 0.$$

    On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \sqrt[4]{y} \end{cases}$.

11. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{cases}$ **:**

    Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

    $$f(x) = y \Leftrightarrow x^5 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{x}.$$

    On a donc $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt[5]{y} \end{cases}$.

12. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$ **:**

    On distingue les cas n pair et n impair et on applique les mêmes méthodes que dans les questions précédentes.

    - Si n pair : on a $x^n = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. De plus $x^n = -1$ est impossible donc f n'est pas surjective.
      En revanche, on peut montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.
    - Si n impair : le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

      $$f(x) = y \Leftrightarrow x^5 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{x}.$$

      On a donc $f^{-1}(y) =: \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{y} \end{cases}$.

13. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\begin{cases} \mathbb{R} & \to &]1, +\infty[\\ x & \mapsto & e^{-x} + 1 \end{cases}$ **:**

    On peut commencer par faire un graphe ou l'étude des variations pour se faire une idée du résultat à démontrer. On raisonne ensuite par analyse-synthèse :

    - Analyse : soit $y \in]1, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

      $$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 1 = y \Leftrightarrow x = -\ln(y - 1) \text{ car } y > 1.$$

    - Synthèse : $\forall y \in]1, +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = -\ln(y - 1)$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]1, +\infty[$, et on a $f^{-1} : \begin{cases}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & -\ln(y - 1) \end{cases}$.

14. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}\right.$ **:**

    On raisonne par analyse-synthèse :

    - Analyse : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in]-1,+\infty[$. On a :

    $$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1+x) = y \Leftrightarrow x = e^x - 1.$$

    - Synthèse : $\forall y \in]1,+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = e^y - 1$, qui est bien dans $]-1,+\infty[$ car $e^y > 0$. Ainsi f est bijective de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et on a f^-1 : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ y & \mapsto & e^y - 1 \end{array}\right.$.

15. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-4,+\infty[\\ x & \mapsto & 2^x - 4 \end{array}\right.$ **:**

    On raisonne par analyse-synthèse :

    - Analyse : soit $y \in]-4,+\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

    $$f(x) = y \Leftrightarrow 2^x - 4 = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y+4)}{\ln 2} \text{ car } y > -4.$$

    - Synthèse : $\forall y \in]-4,+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = \dfrac{\ln(y+4)}{\ln 2}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-4,+\infty[$, et on a f^-1 : $\left\{\begin{array}{ccc}]-4,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{\ln(y+4)}{\ln 2} \end{array}\right.$.

16. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x) + \sin(x) \end{array}\right.$ **:**

    La fonction f n'est pas injective ($f(x) = f(x+2\pi)$), mais f est surjective (transformer $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ou faire une étude de fonction). Donc f n'est pas bijective.

17. **Étude de l'injectivité, surjectivité, bijectivité de la fonction f** : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}\right.$ **:**

    Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. On a alors $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2$, donc f est injective. On a $f(n) = 2 \Leftrightarrow 2n + 1 = 2 \Leftrightarrow n = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

Exercice 4. Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle une bijection ?

Correction 4. **Étude de la bijectivité de la fonction f** : $[\mathbf{1},+\infty[\to [\mathbf{0},+\infty[$ **telle que** $\mathbf{f(x) = x^2 - 1}$ **:**
On utilise le théorème de la bijection.
La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \geq 1$, on a : $f'(x) = 2x$. Comme $x \geq 1$, on obtient que sur cet intervalle : $f'(x) \geq 0$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $+\infty$ s'obtient par propriété sur les sommes de limite. Ainsi, on a :

- La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ comme fonction polynomiale.

- La fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } [1, +\infty[\text{ sur } [0, +\infty[.}$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est une bijection.

Correction 5. **Étude la fonction $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}}$:**

1. **Montrons que f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:**
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On en déduit ainsi les variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par le théorème du monôme de plus haut degré. Cela nous indique que la fonction f ne va pas être injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car par exemple, tout nombre entre 0 et 1 strictement va avoir 2 antécédents par f : un antécédent situé entre 0 et 1 et un autre entre 1 et l'infini. Pour montrer rigoureusement que f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut trouver un contre-exemple. On résout par exemple $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et on montre que $\dfrac{1}{2}$ a deux antécédents par f. En effet, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

   Le discriminant vaut $\Delta = 12$ et on trouve bien deux solutions distinctes $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Ainsi il existe donc $x_1 \neq x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$
2. **Montrons que f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:**
   Vérifions par exemple que 2 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$ (les variations de f nous indiquent quels sont les nombres qui ne vont pas avoir d'antécédent par f). On résout pour cela $f(x) = 2$ et on vérifie que cette équation n'a pas de solution réelle.
$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$
   Or le discriminant d'une telle équation est strictement négatif ($\Delta = -3$), donc il n'existe pas de solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on vient de vérifier que 2 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$ et donc que $\boxed{f \text{ non surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$
3. **Montrons que g est bijective de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$:**
   Pour une telle question, il y a deux méthodes possibles : soit on raisonne par analyse-synthèse en vérifiant qu'il y a une unique solution pour $x \in [-1, 1]$, soit on utilise le théorème de la bijection après avoir étudié les variations de g. Ici on ne nous demande pas l'expression de la réciproque, la méthode la plus simple est donc le théorème de la bijection.
   La fonction g est dérivable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et
$$\forall x \in [-1, 1],\ g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$
   Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la dérivée est toujours positive, on obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	-1		1
g	-1	$\nearrow$	1

On applique alors le théorème de la bijection à g.

- g est continue sur $[-1, 1]$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- g est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- $g(-1) = -1$ et $g(1) = 1$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{g \text{ induit une bijection de } [-1, 1] \text{ sur } [-1, 1].}$

Exercice 6. Soit f une application définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{1-2x}$. Montrer que f est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ à déterminer et déterminer f^{-1}.

Correction 6. La méthode du théorème de la bijection nous donne la bijectivité de f sur les bons ensembles mais pour obtenir l'expression de f^{-1}, il faudra ensuite raisonner par analyse-synthèse. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse :**

  Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $y = f(x)$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

$$y = \frac{x-1}{1-2x} \Leftrightarrow x(2y+1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2y+1} \quad \text{si } y \neq -\frac{1}{2}.$$

- **Synthèse :**

  ⋆ si $y = -\dfrac{1}{2}$. Alors l'équation $f(x) = y$ équivaut à $0 = \dfrac{1}{2}$, donc n'admet aucune solution. Ainsi $-\dfrac{1}{2}$ n'admet pas d'antécédent par f.

  ⋆ si $y = -\dfrac{1}{2}$. Alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution :$x = \dfrac{y+1}{2y+1}$. De plus, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ car : $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{2y+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1$. Impossible donc on a bien $x \neq \dfrac{1}{2}$. **Conclusion :** $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection de } \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$ et la bijection réciproque de f est

$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} & \to & \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \\ y & \mapsto & \dfrac{y+1}{2y+1}. \end{array} \right.}$$

Exercice 7. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sur quels intervalles f est-elle une bijection ? Déterminer alors la bijection réciproque sur l'intervalle contenant 1.

Correction 7. Il vaut mieux ici commencer par étudier la fonction pour savoir quels ensemble prendre au départ et à l'arrivée.
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Étudions alors le signe de $e^x - e^{-x}$: on a : $e^x - e^{-x} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$. Comme $e^x > 0$, il suffit d'étudier le signe de $e^{2x}-1$. On a : $e^{2x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 0$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites aux bornes du domaine de définition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par propriétés sur la somme, la composée et le quotient de limite. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f(0) = 1$.

On peut conjecturer que f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais qu'en revanche f est bijective de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Démontrons le par analyse synthèse.

- Analyse : soit $y \in [1, +\infty[$ fixé. On résout dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $y = f(x)$. Par définition de la fonction f, on obtient donc :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 2ye^x + 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

  On pose $X = e^x$ et on doit résoudre $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4(y^2 - 1)$. Comme $y \geq 1$, on obtient que $\Delta \geq 0$.

  ⋆ Si $y = 1$, on a $\Delta = 0$, et une seule racine $X = 1$. On a alors $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

  ⋆ Si $y > 1$, on a $\delta > 0$, et il existe deux solutions réelles distinctes $X_1 = y + \sqrt{y^2-1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2-1}$. Ainsi on doit résoudre $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2-1}$. On remarque que $y + \sqrt{y^2-10}$ comme somme de deux nombres positifs avec l'un des deux, ici y, strictement positif. De même $y - \sqrt{y^2-1} > 0$ car on a : $y - \sqrt{y^2-1} > 0 \Leftrightarrow y > \sqrt{y^2-1} \Leftrightarrow y^2 > y^2 - 1$ car les deux nombres sont positifs et la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Et donc $y - \sqrt{y^2-1} > 0 \Leftrightarrow 0 > -1$ ce qui est toujours vrai. Ainsi on obtient que $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ ou $x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$. Mais on cherche $x \in \mathbb{R}^+$ donc il faut que $y + \sqrt{y^2-1} \geq 1$ ou $y - \sqrt{y^2-1} \geq 1$. La résolution donne que la première inéquation est toujours vraie et la deuxième toujours fausse. Ainsi on prend $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

- Synthèse : Dans tous les cas, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. Donc f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :

$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \ln(y + \sqrt{y^2-1}). \end{array} \right.}$$

Exercice 8. Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Correction 8. Montrons que l'application $\mathbf{f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{1}\}$ et donnons la bijection réciproque :

La fonction f n'est pas une fonction numérique donc on utilise la méthode par analyse-synthèse pour montrer que f est bijective car le théorème de la bijection ne s'applique que pour les fonctions numériques.

- **Analyse :** Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé. On résout dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $y = f(z)$. Par définition de la fonction f, on obtient donc :
$$y = f(z) \Leftrightarrow y = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow y(z-i) = z+i \Leftrightarrow z(y-1) = i(1+y).$$
On a utilisé ici que $z - i$ n'est pas nul car $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ pour pouvoir multiplier par $z - i$ tout en conservant l'équivalence. Ici il faut distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $y = 1$: on obtient $0 = 2i$: impossible. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f.
  - ⋆ Si $y \neq 1$: On obtient : $y = f(z) \Leftrightarrow z = \dfrac{i(1+y)}{y-1}$.
- **Synthèse :** Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. L'équation $y = f(z)$ admet une unique solution $z = \dfrac{i(1+y)}{y-1}$. On a de plus $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ car : $\dfrac{i(1+y)}{y-1} = i \Leftrightarrow \dfrac{1+y}{y-1} = 1 \Leftrightarrow 1 = -1$: impossible.

  Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{1\}}$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :
$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ y & \mapsto & \dfrac{i(y+1)}{y-1}. \end{array} \right.}$$

Exercice 9. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Correction 9. **Montrons que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminons $\mathbf{f^{-1}}$:**
Comme on cherche l'expression de f^{-1}, on raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse :** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On résout dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $(a,b) = f(x,y)$. Par définition de la fonction f, on obtient donc :
$$(a,b) = f(x,y) \Leftrightarrow (a,b) = (x+y, x-y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ x-y & = & b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \dfrac{a+b}{2} \\ y & = & \dfrac{a-b}{2} \end{array} \right.$$
On a ainsi exprimé (x,y) de façon unique en fonction de (a,b).
- **Synthèse :** Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(a,b) = f(x,y)$ admet une unique solution : $(x,y) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2} \right)$.

  Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2}$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :
$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2} \right). \end{array} \right.}$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ définie par $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{U},\ f(u) = u$ et en déduire que f est surjective.
2. La fonction f est-elle injective ?

Correction 10.

1. **Montrer que $\forall u \in \mathbb{U},\ f(u) = u$ et en déduire que f est surjective.**
   Soit $u \in \mathbb{U}$. On a alors : $f(u) = \dfrac{u}{|u|}$. Or $u \in \mathbb{U}$, donc $|u| = 1$, et on a bien $\boxed{\forall u \in \mathbb{U},\ f(u) = u}$.
   Ainsi, tout $u \in \mathbb{U}$ admet un antécédent par f dans $\mathbb{C}^\star$, qui est u lui-même : $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

2. **Déterminons $\mathbf{f^{-1}(\{u\})}$. Montrons que la fonction f n'est pas injective :**
   - Calcul de $f^{-1}(\{u\})$. On a, par définition d'une image réciproque d'une fonction :
     $$z \in f^{-1}(\{u\}) \Leftrightarrow f(z) = u \Leftrightarrow \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$
     Comme $Z \neq 0$, on pose $z = re^{i\theta'}$ avec $r > 0$ et $\theta' \in [0, 2\pi[$, et on obtient :
     $$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{re^{i\theta'}}{r} = e^{i\theta} \Leftrightarrow e^{i\theta'} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta = \theta'$$
     car $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi]^2$. Ainsi $f^{-1}(\{u\})$ est l'ensemble de tous les nombres complexes non nul dont un argument est θ : $\boxed{f^{-1}(\{u\}) = \{re^{i\theta}, r > 0\}.}$
   - Comme l'image réciproque $f^{-1}(\{u\})$ contient uen infinité d'éléments, ceci prouve que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas in}}$

Exercices abstraits

Exercice 11. Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

Correction 11. On suppose que $f : A \to B$ et $g : B \to C$. On obtient alors que $g \circ f : A \to C$.

1. **Montrons que la composée de deux injections est une injection :**
   On suppose que $f : A \to B$ est injective et $g : B \to C$ est injective. Montrons qu'alors $g \circ f$ est injective de A dans C.
   Soit $(x_1, x_2) \in A^2$ tels que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
   On obtient donc $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$. Or g est injective donc $f(x_1) = f(x_2)$. Mais f est aussi injective donc $x_1 = x_2$.
   Conclusion : $\boxed{g \circ f \text{ est injective de } A \text{ dans } C.}$
2. **Montrons que la composée de deux surjections est une surjection :**
   On suppose que $f : A \to B$ est surjective et $g : B \to C$ est surjective. Montrons qu'alors $g \circ f$ est surjective de A dans C.
   Soit $y \in C$.
   $g : B \to C$ est surjective donc il existe $x_1 \in B$ tel que $y = g(x_1)$.
   Or $x_1 \in B$ et f est surjective de A dans B, donc il existe $x \in A$ tel que $x_1 = f(x)$.
   $x \in A$ et il vérifie $y = g(f(x)) = g \circ f(x)$.
   Conclusion : $\boxed{g \circ f \text{ est surjective de } A \text{ dans } C.}$

Exercice 12. Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Correction 12.

1. **Montrons que si $\mathbf{g \circ f = Id_E}$, alors g est surjective et f est injective :**
   On suppose que $g \circ f = Id_E$.

   - **Montrons que g est surjective de F dans E :**
     Soit $y \in E$.
     Par hypothèse, on a donc $y = g \circ f(y)$, c'est-à-dire $y = g[f(x)]$. On pose alors $X = f(x)$, $X \in F$ et $y = g(X)$.
     Conclusion : $\boxed{g \text{ est surjective de } F \text{ dans } E.}$

- **Montrons que f est injective de E dans F :**
  Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
  Comme $f(x_1) = f(x_2)$, on a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Or par hypothèse $g \circ f = Id_E$. Donc $g \circ f(x_1) = x_1$ et $g \circ f(x_2) = x_2$. Ainsi, on obtient $x_1 = x_2$.
  Conclusion : $\boxed{f \text{ est injective de } E \text{ dans } F.}$

2. **Montrer que si f ∘ g et g ∘ f sont bijectives, alors f et g sont bijectives :**
   On suppose que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives. Par définition de la bijectivité, il existe donc une fonction $h : F \to F$ telle que $(f \circ g) \circ h = Id_F$ et $h \circ (f \circ g) = Id_F$. De même, il existe aussi une fonction $p : E \to E$ telle que $(g \circ f) \circ p = Id_E$ et $p \circ (g \circ f) = Id_E$.
   On applique alors les résultats démontrés ci-dessus.
   Comme $f \circ (g \circ h) = Id_F$, on sait que f est surjective de E dans F. Comme $(h \circ f) \circ g = Id_F$, g est injective de F dans E. Comme $g \circ (f \circ p) = Id_E$, g est surjective de F dans E. Et enfin, comme $(p \circ g) \circ f = Id_E$, f est injective de E dans F.
   Conclusion : $\boxed{\text{les deux fonctions étant à la fois injective et surjective, elle sont bien bijectives.}}$

Exercice 13. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Correction 13.

1. **On suppose que g ∘ f est injective de E dans G et que f est surjective de E dans F. Montrons que g est injective de F dans G :**
   Soit $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
   Comme f est surjective de E dans F et que $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$, on sait qu'il existe $X_1 \in E$ et $X_2 \in E$ tels que $x_1 = f(X_1)$ et $x_2 = f(X_2)$. De plus comme par hypothèse, on a : $g(x_1) = g(x_2)$, on obtient que : $g \circ f(X_1) = g \circ f(X_2)$. Mais $g \circ f$ est injective de E dans G donc $X_1 = X_2$. Puis comme on peut toujours composer par f, on obtient donc $f(X_1) = f(X_2)$, à savoir $x_1 = x_2$. Donc on vient bien de montrer que $\boxed{g \text{ est injective de } F \text{ dans } G.}$
2. **On suppose que g ∘ f est surjective de E dans G et que g est injective de F dans G. Montrons que f est surjective de E dans F :**
   Soit $y \in F$. En particulier on sait alors que $g(y) \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective de E dans G, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g[f(x)]$. De plus, on sait que g est injective de F dans G donc on a : $y = f(x)$. Ainsi on a bien montré l'existence de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $\boxed{f \text{ est surjective de } E \text{ dans } F.}$

Exercice 14. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application h définie par

$$h : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que : (f est injective ou g est injective) $\Rightarrow$ (h injective de E dans $F \times G$).
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G. L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

Correction 14.

1. **Montrons que si f ou g est injective de E dans F ou de E dans G alors h est injective de E dans F × G :**
   On suppose que f ou g est injective. Par exemple, on suppose que f est injective de E dans F (le même type de raisonnement s'applique à g). Montrons que h est injective de E dans $F \times G$.
   Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
   Par définition de h, on a donc : $(f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$ ce qui est équivalent à : $f(x_1) = f(x_2)$ et $g(x_1) = g(x_2)$. Mais comme f est injective de E dans F on en déduit donc que $x_1 = x_2$.
   Ainsi on vient bien de démontrer que $\boxed{h \text{ est injective de } E \text{ dans } F \times G.}$

2. **On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G. Montrons que l'application h n'est pas surjective de E dans F $\times$ G :**
L'application h ne va pas être surjective de E dans $F \times G$ car on ne va pas avoir forcément le même x. Plus précisemment : soit $(a,b) \in F \times G$, on cherche s'il existe $x \in E$ tel que $h(x) = (a,b)$ à savoir tel que $(f(x), g(x)) = (a,b)$ ce qui est équivalent à chercher $x \in E$ tel que $f(x) = a$ et $g(x) = b$. Comme f est surjective de E dans F, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = a$. Et comme g est surjective de E dans G, on sait qu'il existe $x' \in E$ tel que $g(x') = b$. Mais il n'y a aucune raison pour que x et x' soient égaux !Trouvons un exemple où ils ne vont pas être égaux (il y en a plein) : on pose $E = F = G = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$. Vérifions que $h : x \mapsto (x, 2x)$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors que f et g le sont bien (f et g sont même bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Par exemple si on prend $(a,b) = (1,1)$, on peut vérifier qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = (1,1)$. En effet, on devrait avoir $x = 1$ et en même temps $2x = 1$ ce qui est impossible. Donc h n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors que f et g le sont.

Exercice 15. Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Correction 15. Soit f : E $\to$ E une application telle que f $\circ$ f $\circ$ f = f. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective :
On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Pour montrer l'équivalence voulue, on procède par double implication.

- On suppose que f est injective de E dans E. On cherche alors à montrer que f est surjective de E dans E.
Soit $y \in E$.
Par hypothèse, on sait que $f(y) = f \circ f \circ f(y)$, à savoir : $f(y) = f\left[f(f(y))\right]$. Mais comme f est injective, on obtient que $y = f(f(y)) = f(x)$ en posant $x = f(y) \in E$.
Ainsi on a bien montré qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc f est bien surjective de E dans E et on a montré la première implication.
- On suppose maintenant que f est surjective de E dans E. Montrons que f est injective de E dans E.
Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
Comme f est surjective de E dans E et que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$, on sait qu'il existe $z_1 \in E$ et $z_2 \in E$ tels que $x_1 = f(z_1)$ et $x_2 = f(z_2)$. De même en réutilisant la surjectivité de f, on sait aussi qu'il existe $w_1 \in E$ et $w_2 \in E$ tels que $z_1 = f(w_1)$ et $z_2 = f(w_2)$. Ainsi $f(x_1) = f(x_2)$ est équivalent à : $f(f(f(w_1))) = f(f(f(w_2)))$. Mais comme on sait que f vérifie : $f \circ f \circ f = f$, on obtient que : $f(w_1) = f(w_2)$, à savoir $z_1 = z_2$. Puis comme on peut toujours composer par une fonction, ceci implique alors toujours que $f(z_1) = f(z_2)$, à savoir $x_1 = x_2$. Donc on a bien montré que $x_1 = x_2$ et donc que f est injective de E dans E.

Type DS

Exercice 16. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2}$.

1. Étudier la fonction f : domaine de définition, limites, variations.
2. Calculer $f\left(]-2,-1]\right)$, $f\left(]-\infty,-4]\right)$, $f^{-1}\left([0,+\infty[\right)$ et $f^{-1}\left([-10,-1]\right)$.
3. f est-elle injective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
4. f est-elle surjective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
5. On définit la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ par $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \dfrac{3x^2}{x+2} \end{array} \right.$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ en utilisant le théorème de la bijection.
6. Retrouver ce résultat par la méthode d'analyse synthèse, et déterminer g^{-1}.

Correction 16. 1. **Étude de la fonction $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{x+2}}$:**

- Pour que la fonction f soit bien définie, on doit avoir $x+2 \neq 0$, à savoir : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- On peut de toute façon commencer par étudier la fonction f, cela nous donnera une idée des différents résultats.
  - ⋆ La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
  - ⋆ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f'(x) = \dfrac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{3x(x+4)}{(x+2)^2}$.
  - ⋆ On étudie donc le signe de f' pour en déduire les variations de f. On récapitule cela dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$3x$		-		-		-	0	$+$	
$x+4$		-	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	-	‖	-	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-24	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

  - ⋆ Jusitifions toutes les limites :
    - ∘ Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par le théorème sur les monômes de plus haut degré.
    - ∘ Les limites en -2^- et -2^+ s'obtiennent par propriétés sur les sommes et quotients de limites.
- Grâce au tableau de variation, vous devez être capable de voir sur quels ensembles la fonction f est injective, surjective et sur quels ensembles, elle ne l'est pas.

2. **Calcul d'images directes et réciproques**
   - **Calcul de $\mathbf{f}(]-\mathbf{2},-\mathbf{1}])$** : la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-2,-1[$, donc d'après le théorème de la bijection, on a $f(]-2,-1]) = [f(-1), \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)[$, soit $\boxed{f(]-2,-1]) = [3,+\infty[}$.
   - **Calcul de $\mathbf{f}(]-\infty,-\mathbf{4}])$** : la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-2,-1[$, donc d'après le théorème de la bijection, on a $f(]-\infty,-4]) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-4)]$, soit $\boxed{f(]-2,-1]) =]-\infty,-24]}$.
   - **Calcul de $\mathbf{f^{-1}}([\mathbf{0},+\infty[)$** : on doit résoudre $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire :
   $$\frac{3x^2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 > 0$$
   car $3x^2$ est toujours positif et -2 valeur interdite. Donc $\boxed{f^{-1}([0,+\infty[) =]-2,+\infty[}$.
   - **Calcul de $\mathbf{f^{-1}}([-\mathbf{10},-\mathbf{1}])$** : on doit résoudre $-1 \leq f(x) \leq -10$. Or on a :
   $$-1 \leq \frac{3x^2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x^2+x+2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 > 0$$
   car le discriminant de $3x^2+x+2$ est strictement négatif, donc ce trinôme est toujours du signe de 3, donc toujours positif. De même :
   $$\frac{3x^2}{x+2} \leq -10 \Leftrightarrow \frac{3x^2+10x+20}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow x+2 < 0$$
   car le discriminant de $3x^2+10x+20$ est strictement négatif, donc ce trinôme est toujours du signe de 3, donc toujours positif. Donc finalement on doit avoir $x > -2$ et $x < -2$, il n'y a pas de solution. Donc $\boxed{f^{-1}([-10,-1]) = \emptyset}$.

3. **Étude de l'injectivité de f de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$:**
   - **Méthode 1 :**
   D'après le tableau de variation, on peut conjecturer que la fonction f n'est pas injective de $]-2,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ car, pour tout nombre strictement positif, on va pouvoir lui trouver deux antécédents distincts : un après 0 et l'autre entre -2 strictement et 0. Trouvons un contre-exemple. Pour cela, on peut résoudre par exemple $f(x)=1$ et vérifier que l'on trouve bien deux antécédents dans $]-2,+\infty[$. On a : $f(x)=1 \Leftrightarrow 3x^2-x-2=0$. Le calcul donne qu'il existe deux racines qui sont : $-\dfrac{2}{3}$ et 1. Ainsi on a : $-\dfrac{2}{3}\in]-2,+\infty[$, $1\in]-2,+\infty[$ et $f(1)=f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$. Ceci prouve bien que $\boxed{f \text{ n'est pas injective de }]-2,+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.}$
   - **Méthode 2 :** (par la définition, moins facile)
   Pour l'étude de l'injectivité de f, on peut aussi commencer par essayer de vérifier par la définition que f est injective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$: cette méthode nous donnera soit que f est injective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ soit elle nous donnera une idée du contre-exemple qu'il faut prendre.
   Soit $(x_1,x_2)\in]-2,+\infty[^2$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$. On a donc
   $$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_1+2}=\frac{x_2^2}{x_2+2}\\ &\Leftrightarrow x_1^2(x_2+2)=x_2^2(x_1+2)\\ &\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[2x_1+2x_2+x_1x_2\right]=0. \end{aligned}$$
   Ainsi, on n'arrive pas à vérifier que la fonction est injective mais on a une idée du contre-exemple à trouver : il faut prendre x_1 et x_2 différents et vérifiant $2x_1+2x_2+x_1x_2=0$.
   On choisit par exemple $x_1=1\in]-2,+\infty[$ et $x_2=-\dfrac{2}{3}\in]-2,+\infty[$. On a $x_1\neq x_2$ et un calcul rapide montre que $f(x_1)=f(x_2)$.
   $$\boxed{f \text{ n'est pas injective de }]-2,+\infty[\text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4. **Étude de la surjectivité de f de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$:**
   - **Méthode 1 :**
   D'après les variations de f, on sait que f ne va pas être surjective de $]-2,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ donc il faut que l'on trouve un contre-exemple, à savoir un élément de l'espace d'arrivé $\mathbb{R}$ qui ne possède pas d'antécédent dans $]-2,+\infty[$. Toujours d'après le tableau de variation, on sait que c'est le cas pour tout nombre strictement négatif. Donc par exemple, on prend $y=-1$. On cherche alors à résoudre $f(x)=-1$ et à vérifier que cette équation n'a pas de solution dans $]-2,+\infty[$. On a : $f(x)=-1\Leftrightarrow 3x^2+x+2=0$. Le discriminant vaut $\Delta=-23<0$ et il n'existe pas de solution réelle. Ainsi $-1\in\mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent par f et donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective de }]-2,+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.}$
   - **Méthode 2 :** (par analyse-synthèse, moins facile)
   Pour étudier la surjectivité de f de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on peut aussi raisonner par analyse-synthèse :
   Soit $y\in\mathbb{R}$.
     - ⋆ Analyse :
     On suppose qu'il existe $x\in]-2,+\infty[$ vérifiant $y=f(x)$.
     $$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y(x+2)=3x^2\\ &\Leftrightarrow 3x^2-yx-2y=0. \end{aligned}$$
     L'équation du second degré admet des solutions si $\Delta\geq 0$. Or, on a $\Delta=y(y+24)$. Ainsi, cette équation n'admet pas de solution si $y\in]-24,0[$.

- ⋆ Synthèse :
  On choisit par exemple $y = -1$. D'après ce qui précède, comme $y \in]-24, 0[$, il n'existe aucun $x \in]-2, +\infty[$ vérifiant $y = f(x)$. Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective de }]-2, +\infty[\text{ sur } \mathbb{R}.}$$

5. **Montrons que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ par le théorème de la bijection :**
   Pour pouvoir appliquer le théorème de la bijection, on étudie les variations de g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Le calcul de la dérivée donne

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = \frac{3x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

   g' est donc toujours positive sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit les variations de g :

x	0		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$+\infty$

   On peut alors appliquer le théorème de la bijection. En effet, on a
   - g est continue sur $\mathbb{R}^+$
   - g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   - $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   Le théorème de la bijection nous assure ainsi que la fonction $\boxed{g \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

6. **Montrons que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ par la méthode de résolution d'équation :**
   - Soit $y \in \mathbb{R}^+$.
   - **Analyse :** On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = g(x)$. On a déjà vu que

$$y = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - yx - 2y = 0.$$

     Comme $y \in \mathbb{R}^+$, il existe deux solutions

$$x_1 = \frac{y + \sqrt{y(y+24)}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{y - \sqrt{y(y+24)}}{6}.$$

     Si $y = 0$, on remarque que $x_1 = x_2 = 0$ est la seule solution qui convient. On suppose alors que $y > 0$. Vérifions que $x_2 < 0$. On aura alors démontré qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ (on a déjà vu que $x_1 > 0$).

$$x_2 < 0 \Leftrightarrow y < \sqrt{y(y+24)} \Leftrightarrow y^2 < y^2 + 24y \Leftrightarrow 0 < 24y.$$

     On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux membres sont positifs car $y > 0$. De plus, $0 < 24y$ est toujours vrai car $y > 0$. On a ainsi démontré que $x_2 < 0$. De plus, $x_1 > 0$ comme somme de termes positifs, ainsi, seul x_1 convient.
   - **Synthèse :** Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On pose $x = \dfrac{y + \sqrt{y(y+24)}}{6}$.
     - ⋆ x est bien défini car $y \geq 0$ donc $y(y+24) \geq 0$.
     - ⋆ $x \in \mathbb{R}^+$ comme somme de nombres positifs.
     - ⋆ $y = g(x)$ d'après l'analyse.
     - ⋆ x est unique toujours d'après ce qui a été fait en analyse.

Ainsi, on vient de démontrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$ La bijection réciproque de g est

$$\boxed{\begin{array}{rccl} g^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & g^{-1}(y) = \dfrac{y+\sqrt{y(y+24)}}{6}. \end{array}}$$