TD 7 - Vocabulaires des Applications

Entraînements

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe associe son module.
Calculer l'image directe par f de :

1. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = x + 2i\}$
2. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = (1+\cos(x)) + i\sin(x)\}$.

Exercice 3. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
7. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
8. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$
9. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
10. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
11. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array} \right.$
12. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$, $n \in \mathbb{N}^\star$
13. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array} \right.$
14. $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$
15. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-4,+\infty[\\ x & \mapsto & 2^x - 4 \end{array} \right.$
16. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x)+\sin(x) \end{array} \right.$
17. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$

Exercice 4. Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle une bijection ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ est une bijection.

Exercice 6. Soit f une application définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{1-2x}$. Montrer que f est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ à déterminer et déterminer f^{-1}.

Exercice 7. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sur quels intervalles f est-elle une bijection ? Déterminer alors la bijection réciproque sur l'intervalle contenant 1.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Exercice 9. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ définie par $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{U},\ f(u) = u$ et en déduire que f est surjective.
2. La fonction f est-elle injective ?

Exercices abstraits

Exercice 11. Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 12. Soit $E,\ F$ deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 13. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 14. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application h définie par

$$h : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que : (f est injective ou g est injective) $\Rightarrow$ (h injective de E dans $F \times G$).
2. On suppose que f est surjective de E dans F et que g est surjective de E dans G. L'application h est-elle nécessairement surjective de E dans $F \times G$?

Exercice 15. Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Type DS

Exercice 16. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2}$.

1. Étudier la fonction f : domaine de définition, limites, variations.
2. Calculer $f\left(]-2,-1]\right)$, $f\left(]-\infty,-4]\right)$, $f^{-1}\left([0,+\infty[\right)$ et $f^{-1}\left([-10,-1]\right)$.
3. f est-elle injective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
4. f est-elle surjective de $]-2,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$?
5. On définit la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ par $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \dfrac{3x^2}{x+2} \end{array} \right.$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ en utilisant le théorème de la bijection.
6. Retrouver ce résultat par la méthode d'analyse synthèse, et déterminer g^{-1}.