

Correction TD 8 : Équations différentielles à coefficients constants

Entraînements

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$

- | | |
|------------------------|--------------------|
| 1. $y' - 2y = x + x^2$ | 3. $y' = y + 1$ |
| 2. $3y' - 2y = x$ | 4. $y' = -y + e^x$ |

Correction 1. 1. $y' - 2y = x + x^2$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - 2y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -2$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -2x$.

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - 2y = x + x^2$:

Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $-2ax^2 + (-2b + 2a)x + b - 2c = x + x^2$. Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} -2a & = & 1 \\ -2b + 2a & = & 1 \\ b - 2c & = & 0 \end{cases} . \text{ Ainsi, on obtient que : } y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}.$$

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

2. $3y' - 2y = x$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $3y' - 2y = 0 \iff y' - \frac{2}{3}y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{2}{3}$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -\frac{2}{3}x$.

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}x$:

Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$$a - \frac{2}{3}(ax + b) = \frac{1}{3}x . \text{ Par identification des coefficients, on obtient : } \begin{cases} -\frac{2}{3}a & = & 1 \\ a - \frac{2}{3}b & = & 0 \end{cases} . \text{ Ainsi, on obtient}$$

que : $y_p(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2}x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

3. $y' = y + 1$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - y = 0$:

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = 1$:
On cherche y_p sous forme constante on trouve $y_p(x) = -1$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^x - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $y' = -y + e^x$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + y = 0$:

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + y = e^x$:
On cherche y_p sous forme ae^x avec $a \in \mathbb{R}$ on trouve $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes

- $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$
- $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
- $y'' + 4y' + 4y = \sin xe^{-2x}$
- $y'' - 6y' + 9y = e^x$
- $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$
- $2y'' - y' - y = e^x + e^{-x}$
- $y'' - 2y' + 3y = \cos x$
- $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3\sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$
- $y'' - my + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$
- $y'' + y = x^2 \cos x$
- $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$

Correction 2. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$:

★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' + 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 0$ et la solution est $r_0 = -2$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A + Bx)e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$:

Le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = 1$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors :

$$y_p'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x,$$

puis on en déduit :

$$y_p''(x) = (2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)e^x.$$

Or on sait que $y_p''(x) + 4y_p'(x) + 4y_p(x) = x^2e^x$, donc on obtient :

$$(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c + 4(ax^2 + (2a + b)x + b + c) + 4(ax^2 + bx + c))e^x = x^2e^x.$$

En divisant par e^x , et en identifiant les coefficients du polynôme, on obtient : $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{4}{27}$ et $c = -\frac{2}{27}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} - \frac{2}{27}\right)e^x$.

★ Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = (A + Bx)e^{-2x}$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

2. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$:

On a déjà résolu l'équation homogène associée.

Le second membre est cette fois de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = -2$ racine double de l'équation caractéristique.

On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On

obtient par identification : $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$ et $c = 0$.

La solution générale est alors : $y(x) = \left(A + Bx + \frac{1}{12}x^2\right)e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

3. $y'' + 4y' + 4y = \sin(x)e^{-2x}$:

On a déjà résolu l'équation homogène associée.

Le second membre est cette fois de la forme

$$f(x) = \sin(x)e^{-2x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}e^{-2x} = \frac{1}{2}e^{(-2+i)x} - \frac{1}{2}e^{-(2+i)x}.$$

On utilise alors le principe de superposition : on cherche tout d'abord une solution particulière pour l'équation $y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{(-2+i)x}$. Comme $-2 + i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on la cherche sous

la forme $y_1(x) = ae^{(-2+i)x}$. Par identification, on trouve $A = -\frac{1}{2}$.

On cherche ensuite une solution particulière pour l'équation $y'' + 4y' + 4y = -\frac{1}{2}e^{-(2+i)x}$. On la cherche sous

la forme $y_2(x) = be^{-(2+i)x}$. Par identification, on trouve $b = \frac{1}{2}$.

La solution générale est alors $y = y_h + y_1 + y_2$, soit : $y(x) = (A + Bx)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{(-2+i)x} + \frac{1}{2}e^{-(2+i)x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes. On simplifie pour retrouver une solution réelle, et on obtient

$$y(x) = (A + Bx - \sin(x))e^{-2x}.$$

4. $y'' - 6y' + 9y = e^x$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

5. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$:

★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4$ et les deux solutions complexes conjuguées sont $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

★ Recherche d'une solution particulière : on a cherché une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2, soit $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Par identification, on obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 1$.

★ Conclusion : la solution générale est $y(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

6. $2y'' - y' - y = e^x + e^{-x}$:

La solution générale est $y(x) = Ae^x + Be^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

7. $y'' - 2y' + 3y = \cos x$:

La solution générale est $y(x) = (A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x))e^x + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

8. $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3 \sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$:

La solution générale est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 7x + 20 - \frac{12}{25} \cos x - \frac{9}{25} \sin x + \frac{1}{49}e^{3x} + \frac{1}{24}x^3e^{-\frac{x}{2}}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

9. $y'' - my + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

10. $y'' + y = x^2 \cos x$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

11. $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$

3. $y'' - 2y' + 5y = 5$

2. $4y'' - 4y' + y = 4$

4. $y'' - 2y' = 2$

Correction 3. Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $y'' + 8y' + 15y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 + 8r + 15 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, données par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{-5t} + Be^{-3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y_p'(t) = y_p''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 15\alpha = 5$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} + \frac{1}{3}\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A + B + \frac{1}{3} = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 1$. Or on a : $q'(t) = -5Ae^{-5t} - 3Be^{-3t}$, donc $q'(0) = -5A - 3B = 1$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + B = -\frac{1}{3} \\ -5A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution est donc donnée par $y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.

2. $4y'' - 4y' + y = 4$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $4y'' - 4y' + y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double, donnée par $r = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Bte^{\frac{t}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y_p'(t) = y_p''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \alpha = 4$, soit $\alpha = 4$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto Ae^{\frac{t}{2}} + Bte^{\frac{t}{2}} + 4\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \frac{A}{2}e^{\frac{t}{2}} + Be^{\frac{t}{2}} + \frac{B}{2}te^{\frac{t}{2}}$, donc $y'(0) = \frac{A+B}{2} = 1$, soit $B = 2$. La solution est donc donnée par

$$y(t) = 2te^{\frac{t}{2}} + 4.$$

3. $y'' - 2y' + 5y = 5$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $y'' - 2y' + 5y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, données par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{-5t} + Be^{-3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y_p'(t) = y_p''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 5\alpha = 5$, soit $\alpha = 1$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto e^t(A \cos(2t) + B \sin(2t)) + 1\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A + 1 = 0$, donc $A = -1$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = e^t(A \cos(2t) + B \sin(2t)) + e^t(-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t))$, donc $y'(0) = A + 2B = 1$.

On en déduit $B = \frac{1-A}{2} = 1$. La solution est donc donnée par $y(t) = e^t(-\cos(2t) + \sin(2t)) + 1$.

4. $y'' - 2y' = 2$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Cependant, ici le coefficient du terme y est nul : on se ramène à une équation du premier ordre, en $z = y'$.

On commence donc par résoudre l'équation $z' - 2z = 2$. La solution de l'équation homogène associée sont de la forme $z_h(t) = Ce^{2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière constante : $z_p(t) = \alpha$. On obtient $\alpha = -1$. Les solutions générales sont donc de la forme $z(t) = Ce^{2t} - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Revenons à présent à y : on a $y' = z$, donc y est une primitive de z . On en déduit que y s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \frac{C}{2}e^{2t} - t + K, \text{ où } (C, K) \in \mathbb{R}^2.$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer C et K : on a $y(0) = 0$, soit $\frac{C}{2} + K = 0$. De plus, on a

$y'(t) = Ce^{2t} - 1$, donc $y'(0) = 1$ donne $C - 1 = 1$, soit $C = 2$. En revenant à l'équation $\frac{C}{2} + K = 0$, on

obtient alors $K = -1$. On a donc finalement $y(t) = e^{2t} - t - 1$.

Exercice 4. On considère un paramètre réel m . Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de m :

$$y'' - (m+1)y' + my = e^x - x - 1.$$

Correction 4. On considère un paramètre réel m . Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de m : $y'' - (m+1)y' + my = e^x - x - 1$.

- On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - (m+1)y' + my = 0$
L'équation caractéristique associée est : $r^2 - (m+1)r + m = 0$ dont le discriminant est $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$. Il faut donc distinguer deux cas :

- ★ Cas 1 : si $m \neq 1$. Alors on a $\Delta > 0$, donc l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes, qui sont $\frac{m+1-|m-1|}{2}$ et $\frac{m+1+|m-1|}{2}$, soit $r_1 = 1$ et $r_2 = m$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = Ae^x + Be^{mx}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- ★ Cas 2 : si $m = 1$. Alors on a $\Delta = 0$, donc l'équation caractéristique possède une solution réelle double, qui est $r_0 = 1$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A + Bx)e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - (m+1)y' + my = e^x$: on doit à nouveau faire deux cas, selon la valeur de m .
 - ★ Cas 1 : si $m \neq 1$. Le second membre est de la forme e^x avec 1 racine simple de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{1-m}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_1(x) = \frac{1}{1-m}xe^x$.
 - ★ Cas 2 : si $m = 1$. Le second membre est de la forme e^x avec 1 racine double de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ax^2e^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - (m+1)y' + my = x+1$. Il faut distinguer le cas où le coefficient du y vaut 0.
 - ★ Cas 1 : si $m \neq 0$. Le second membre est un polynôme de degré 1, on cherche alors y_2 sous la forme $y_2(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{m}$ et $b = \frac{2m+1}{m^2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_2(x) = \frac{1}{m}x + \frac{2m+1}{m^2}$.
 - ★ Cas 2 : si $m = 0$. On doit alors résoudre $y'' - y' = x+1$. On a une équation différentielle d'ordre 1 en y' . On cherche donc une solution particulière pour y' de la forme $y'_2(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = -1$ et $b = 2$. On a donc $y'_2(x) = -x + 2$, et on peut choisir comme solution particulière $y_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$.
- Conclusion : on utilise le principe de superposition pour dire que la solution générale de l'équation s'écrit $y = y_h + y_1 + y_2$. Selon les cas, on obtient donc :
 - ★ Cas 1 : si $m \notin \{0, 1\}$. $y(x) = Ae^x + Be^{mx} + \frac{1}{1-m}xe^x - \frac{1}{m}x - \frac{2m+1}{m^2}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
 - ★ Cas 2 : si $m = 1$. $y(x) = (A + Bx)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - x - 3$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
 - ★ Cas 3 : si $m = 0$. $y(x) = Ae^x + B + xe^x + \frac{x^2}{2} - 2x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Correction 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 5y = 0$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. L'équation caractéristique a donc deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 2 - i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

- ★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - 4y' + 5y = e^x$:
Le second membre est de la forme e^{mx} avec $m = 1$ et $i \times 1$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.
- ★ La solution générale de l'équation est alors : $y(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{2}e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- ★ Conditions initiales. On a $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Or on sait que $y(0) = A + \frac{1}{2}$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A \cos(x) + 2B \sin(x) - A \sin x + B \cos x) + \frac{1}{2}e^x$. On en déduit que $y'(0) = 2A + B + \frac{1}{2}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + \frac{1}{2} = 1 \\ 2A + B + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales données est

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{2}(\cos(x) - 3 \sin(x)) + \frac{1}{2}e^x.$$

2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

- ★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- ★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 5y = 0$. D'après les calculs précédents, la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- ★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$:
Le second membre est de la forme e^{mx} avec $m = 2$ et $i \times 2$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = 1$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = e^{2x}$.
- ★ La solution générale de l'équation est alors : $y(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x) + 1)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- ★ Conditions initiales. On a $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Or on sait que $y(0) = A + 1$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A \cos(x) + 2B \sin(x) + 2 - A \sin x + B \cos x)$. On en déduit que $y'(0) = 2A + 2 + B$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ 2A + B + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales données est

$$y(x) = e^{2x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1).$$

Type DS

Exercice 6. Cinétique chimique

On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v = -\frac{1}{2} \frac{d[N_2O_5]}{dt}$ vérifie l'équation : $v = k[N_2O_5]$.

En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

Correction 6. Cinétique chimique

On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[N_2O_5]}{dt} \text{ vérifie l'équation : } v = k[N_2O_5].$$

En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

On doit résoudre l'équation différentielle : $-\frac{1}{2}y' = ky$, c'est-à-dire $y' + 2ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{y : t \mapsto Ce^{-2kt}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on a $y(0) = c_0$, donc $Ce^{-2k \times 0} = c_0$, soit $C = c_0$. On en déduit que y a pour expression $y(t) = c_0e^{-2kt}$.

Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonctions y , en supposant que k et c_0 sont des constantes strictement positives.

On peut calculer la constante de temps caractéristique de la réaction en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'axe des abscisses. Ce temps est ici $t_c = \frac{1}{2k}$.

Exercice 7. Loi de Fick

Une cellule est plongée dans une solution de potassium de concentration c_p . On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t , et on suppose que $c(0) = 0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que

$$c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}.$$

Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c .

Correction 7. Loi de Fick

Une cellule est plongée dans une solution de potassium de concentration c_p . On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t , et on suppose que $c(0) = 0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que

$$c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}.$$

Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c .

On doit résoudre l'équation différentielle : $c' + \frac{1}{\tau}c = \frac{1}{\tau}c_p$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $c' + \frac{1}{\tau}c = 0$. L'ensemble des solutions est $S_h = \{c_h : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}$.
- On cherche une solution particulière constante : $f(t) = \alpha$. On a alors $f'(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{\tau}\alpha = \frac{1}{\tau}c_p$, soit $\alpha = c_p$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{c : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}} + c_p, C \in \mathbb{R}\}$. Comme de plus on a $c(0) = 0$, on a $C + c_p = 0$, soit $C = -c_p$. Finalement, la solution est donnée par $c(t) = c_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonctions c , en supposant que τ et c_p sont des constantes strictement positives.

On constate que la concentration tend vers c_p : les concentrations en potassium s'équilibrent entre le milieu extérieur et la cellule.

Exercice 8. Datation au carbone 14.

La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année t , y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4} \text{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

Correction 8. Datation au carbone 14.

La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année t , y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4} \text{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.

On doit résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{y : t \mapsto Ce^{-kt}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on a $y(0) = N_0$, donc $Ce^{-k \times 0} = N_0$, soit $C = N_0$. On en déduit que y a pour expression

$$\boxed{y(t) = N_0 e^{-kt}}.$$

2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.

On cherche $t_{0.5}$ tel que :

$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -kt_{0.5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_{0.5} = \frac{\ln 2}{k}}$. L'application numérique donne $t_{0.5} \simeq 5599$ ans.

3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

On cherche t_1 tel que :

$$y(t_1) = 0.7N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{-kt_1} = 0.7N_0 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = 0.7 \Leftrightarrow -kt_1 = \ln(0.7)$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_1 = -\frac{\ln 0.7}{k}}$. L'application numérique donne comme estimation $t_1 \simeq 2881$ ans pour ces fragments.

Exercice 9.

1. Circuit RC

On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q .

2. Circuit LC

On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de q .

Correction 9. 1. Circuit RC

On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q . On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $q' + \frac{1}{RC}q = 0$. L'ensemble des solutions est :
 $S_h = \{q_h : t \mapsto Ke^{-\frac{t}{RC}}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}\}.$
- On cherche une solution particulière constante : $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q'_p(t) = 0$, donc on doit avoir
 $0 + \frac{1}{RC}\alpha = \frac{V}{R}$, soit $\alpha = VC$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{q : t \mapsto Ke^{-\frac{t}{RC}} + VC, K \in \mathbb{R}\}$. Comme de plus on a $q(0) = 0$, on a $K + VC = 0$, soit $K = -VC$. Finalement, la solution est donnée par $q(t) = VC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

On constate que la charge tend vers VC . On peut trouver le temps caractéristique du circuit en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote $y = VC$. Ce temps est ici $t_c = RC$.

2. Circuit LC

On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de q .

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 + \frac{1}{LC} = 0$. Ses solutions sont complexes conjuguées, données par $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$ avec $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'ensemble des solutions est $S_h = \{q_h : t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$

- On cherche une solution particulière constante : $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q_p''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{LC}\alpha = \frac{V}{L}$, soit $\alpha = VC$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{q : t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + VC, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$. On étudie à présent les conditions initiales. On a $q(0) = A + VC = 0$, soit $A = -VC$. De plus, on doit avoir $q'(0) = 0$. On calcule la dérivée de q : $q'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$, donc $q'(0) = B = 0$. On a donc finalement : $\boxed{q(t) = VC(1 - \cos(\omega t))}$.

On constate que la charge oscille entre 0 et $2VC$.

La période de charge est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$.