CH8 - Équations différentielles à coefficients constants

Une équation différentielle est une équation dont la variable est une fonction f, et qui met en jeu f et ses dérivées. Les équations différentielles interviennent dans de nombreux domaines physiques et biologiques pour étudier des phénomènes qui évoluent dans le temps, comme par exemple des réactions chimiques ou la croissance d'une population.

Exemple 1. En dynamique des populations, le modèle de Malthus décrit l'évolution d'une population placée dans des conditions idéales (nourriture et place illimitée) grâce à une équation différentielle. Le nombre d'individus au temps t est noté $N(t)$, et la fonction N obéit à l'équation différentielle

$$N'(t) = \lambda N(t),$$

ce qui signifie que la croissance de la population est proportionnelle au nombre d'individus.

Les équations différentielles sont omniprésentes en sciences. Dès qu'il s'agit d'étudier les variations au cours du temps d'une quantité, que ce soit en physique, en chimie, en biologie ou même en économie, on est amené à modéliser le phénomène à l'aide d'équations différentielles. Vous en avez déjà (ou vous allez en) rencontrées en électricité, en mécanique, en cinétique...

I Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans toute cette section, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, et deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Définition 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre :

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résoluble toute équation de la

  forme : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)(1)$
- Lorsque b est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogéne.

  On appelle équation homogène associée à (1) l'équation :
- Une équation différentielle linéaire est dite à coefficients constants lorsque la fonction a est constante.

Définition 2. Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :
On appelle solution de l'équation différentielle linéaire (1) toute fonction :

- f dérivable sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$

Dans ce chapitre on se contentera de regarder le cas où la fonction $x \mapsto a(x)$ est constante. On cherche donc à résoudre les équations de la forme

$$y'(x) + ay(x) = b(x)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et b est une fonction de réelle.

I. 1 *Résolution de l'équation homogène associée*

Exercice 1. Résolution de $y'(x) + 2y(x) = 0$.

Théorème 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ Les solutions de l'équation différentielle homogène associée : $y'(x) + ay(x) = 0$ sont les fonctions :

$$S_h =$$

I. 2 Solution particulière avec second membre

Exercice 2.

1. Trouver une solution f_p de $y'(x) + 2y(x) = 3x + 1$.
2. Vérifier que $f(x) = f_p(x) + e^{-2x}$ est aussi solution de l'équation précédente.

Lorsque a est constante et que le second membre $b(x)$ est de type polynomial et/ou exponentiel la recherche d'une solution particulière est simple et rapide en appliquant les méthodes suivantes :

Expression de $b(x)$ et condition éventuelle	**Forme de la solution particulière $y_p(x)$**
Polynôme de degré n	
$P(x)e^{mx}$ $\quad m \in \mathbb{C}$, $m \neq -a$	$Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{-ax}$	$xQ(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer

Proposition 2. Soient $b_1, b_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I et soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si y_1 et y_2 sont respectivement des solutions de

$$y'(x) + ay(x) = b_1(x) \qquad \text{et} \qquad y'(x) + ay(x) = b_2(x)$$

alors :

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$$

Théorème 3. La solution générale de $y'(x) + ay(x) = b(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée $y'(x)+ay(x) = 0$ et d'une solution particulière de $y'(x) + ay(x) = b(x)$. Ainsi, si :

- on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (2) : $S_h = \{x \mapsto Ce^{-ax} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$
- On note y_p une solution particulière de $y'(x) + ay(x) = b(x)$.

Alors l'ensemble des solutions de $y'(x) + ay(x) = b(x)$ est :

$$\boxed{S_h = \{x \mapsto y_p(x) + Ce^{-ax} \,|\, C \in \mathbb{R}\}}$$

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

- Commencer par dire que c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre.
- Additionner les deux.

Exercice 3. Résoudre l'équations différentielle suivante :

$$y' + 2y = xe^{-2x}.$$

I. 3 Équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale

Proposition 4. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) + ay(x) = b(x)$ admet une unique solution y vérifiant $y(x_0) = y_0$.
La condition $y(x_0) = y_0$ détermine la constante.

Définition 3. Le système équation+condition initiale s'appelle Problème de Cauchy

Méthode pour trouver une solution vérifiant une condition initiale :

- Résoudre l'équation différentielle avec la méthode générale.
- Utiliser la condition $y(t_0) = y_0$ pour déterminer la constante C.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = x$ avec $y(1) = 2$.

II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère dans toute cette partie I un intervalle de $\mathbb{R}$, (a, b, c) trois constantes réelles avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ continue (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

- On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

- Lorsque f est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogène. On appelle équation homogène associée à (1) l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

- On appelle équation caractéristique associée, l'équation :

Définition 5. Solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre :
On appelle solution de l'équation différentielle linéaire (1) toute fonction u

- Définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = f(x)$$

Exercice 5. Trouver une solution de l'équation

$$y''(x) + y(x) = 0$$

II. 1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

Proposition 5. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée (3). Les solutions de l'équation différentielle homogène associée (2) sont données par :

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines rélles distinctes r_1 et r_2 et

$$S_h =$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r et

$$S_h =$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ et

$$S_h =$$

Remarque. On notera l'analogie avec les suites linéaires récurrentes d'ordre deux.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation différentielle suivante

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$$

II. 2 Solution particulière avec second membre

Seconds membres particuliers

Le programme officiel indique que la forme des solutions particulières doit vous être donner. Si toutefois ce n'est pas le cas, voici un tableau qui récapitule sous quelle forme il faut chercher la solution particulière y_p selon la forme du second membre $f(x)$ de l'équation différentielle à coefficients constants. N'apprenez surtout pas ce tableau par coeur. Soit vous comprenez que les solutions particulières sont "de la même forme" que le second membre, soit vous oubliez ça le plus vite possible et vous vous remettez à votre cours de SVT.

On rappelle ici qu'à toute équation différentielle du second ordre à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = f(x)$, on lui associe l'équation caractéristique

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{EC}$$

Expression de $f(x)$ et condition éventuelle	**Forme de la solution particulière $y_p(x)$**
Polynôme de degré n avec $c \neq 0$	Polynôme de degré n à déterminer
e^{mx} $\quad m \in \mathbb{C}$, m n'est pas racine de (EC)	αe^{mx}, α à déterminer
e^{mx} $\quad m \in \mathbb{C}$, m est racine simple de (EC)	$\alpha x e^{mx}$, α à déterminer
e^{mx} $\quad m \in \mathbb{C}$, m est racine double de (EC)	$\alpha x^2 e^{mx}$, α à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $\quad m \in \mathbb{C}$, m n'est pas racine de (EC)	$Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $\quad m \in \mathbb{C}$, m est racine simple de (EC)	$xQ(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer
$P(x)e^{mx}$ $\quad m \in \mathbb{C}$, m est racine double de (EC)	$x^2Q(x)e^{mx}$ avec $\deg P = \deg Q$, Q à déterminer
$\cos(wx)$ ou $\sin(wx)$ $\quad w \in \mathbb{R}^\star$, iw pas racine de (EC)	$\alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$, α, β à déterminer
$\cos(wx)$ ou $\sin(wx)$ $\quad w \in \mathbb{R}^\star$, iw racine de (EC)	$\alpha x \cos(wx) + \beta x \sin(wx)$, α, β à déterminer

Principe de superposition

Proposition 6. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trois réels avec $a \neq 0$, $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Si y_1 et y_2 sont respectivement des solutions de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

Théorème 7. La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (2) et d'une solution particulière de (1). Ainsi, si :

- on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (2) :

$$S_h = \{t \mapsto C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On note y_p une solution particulière de (1)

Alors l'ensemble des solutions de (1) est :

$$S_h = \{t \mapsto y_p(t) C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

- Commencer par dire que c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
- Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
- Rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre.
- Additionner les deux.

Exercice 7. Résoudre $y'' + y = 9$.

II. 3 Équation différentielle linéaire du second ordre avec conditions initiales

Il y a deux constantes à déterminer, donc pour avoir unicité de la solution, il faut, cette fois-ci, avoir deux conditions initales.

Proposition 8. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$.
L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

admet une unique solution y vérifiant

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1. \end{cases}$$

Méthode pour trouver une solution vérifiant une condition initiale :

- Résoudre l'équation différentielle avec la méthode générale.
- Utiliser les conditions $y(t_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ pour déterminer les constantes A et B.

Exercice 8. Résoudre $y'' - 2y' - 3y = 9x^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.