

TD - 9 : Géométrie

Entraînements

Géométrie du plan

Exercice 1. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite \mathcal{D}' passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Correction 1. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite \mathcal{D}' passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

$$\mathcal{D}' \text{ a pour équation paramétrique : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}.$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}') &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ 2x + 5y - 10 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ -2 + 6\lambda + 10 + 10\lambda - 10 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ \lambda = 1/8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -5/8 \\ y = 9/4 \end{cases} \iff M\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' se coupent en un unique point $M_0\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4}\right)$.

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D .

Correction 2. Un vecteur directeur de D est le vecteur \vec{AB} de coordonnées

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Une équation paramétrique de D est donc donnée par le système :

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

Exercice 3. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$.

Déterminer le projeté orthogonal de $B = (1, 1)$ sur D .

Correction 3. A venir

Exercice 4. Soit D la droite d'équation $x + y - 1 = 0$. Déterminer une équation paramétrique de D .

Donner une équation cartésienne de la droite D' parallèle à D et passant par le point de coordonnées $A = (1, 1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite orthogonale à D et passant par A

Correction 4. A venir

Exercice 5. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2, 4)$ et $(-1, 3)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, -2)$. Donner des équations de

- La droite (AB) .
- La droite \mathcal{D} qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u} .
- La droite \mathcal{D}' qui passe par B et qui est orthogonale à \vec{v} .

Correction 5. A venir

Exercice 6.

- Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
- La partie \mathcal{C}_2 du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.
- Déterminer l'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Correction 6.

- Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.**

Le cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ aura pour centre le milieu du segment $[AB]$, i.e. le point $\Omega(5, 0)$, et pour rayon

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-2)^2}}{2} = \sqrt{5}.$$

Il aura donc pour équation : (point de repère : $\Omega M^2 = 5$)

$$\boxed{(x - 5)^2 + y^2 = 5}$$

- La partie \mathcal{C}_2 du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.**

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$(M \in \mathcal{C}_2) \iff x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \iff (x^2 - 8x + 16) - 16 + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 10 = 0$$

Donc, en posant $\Omega(4, -\frac{1}{2})$, on a :

$$(M \in \mathcal{C}_2) \iff (x - 4)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \iff \Omega M^2 = \frac{25}{4} \iff \Omega M = \frac{5}{2}$$

Donc \mathcal{C}_2 est le cercle de centre $\Omega(4, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

- Déterminer l'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .**

Commencez par tracer \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dans le plan pour voir de quoi il s'agit.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) &\iff \begin{cases} (x - 5)^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (-2x + 10)^2 - 10x + 20 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2 - 50x + 120 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 10x + 24 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{10 - \sqrt{4}}{2} \text{ ou } x = \frac{10 + \sqrt{4}}{2} \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont deux points d'intersection : $M_1(4, 2)$ et $M_2(6, -2)$.

Exercice 7. Soit A et B de coordonnées : $A(1, 2)$ et $B(2, 3)$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(2, 0)$ et de rayon

- Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM .

Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

Correction 7. A venir.

Géométrie de l'espace

- Exercice 8.** 1. Déterminer l'équation du plan P qui passe par les points A, B, C de coordonnées respectives :
 $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ et $C = (-1, 0, -2)$.
2. Donner deux vecteurs non colinéaires et parallèles à P
3. Soit D de coordonnées $(1, 2, 3)$. Est ce que D appartient à P ?
4. Donner H le projeté orthogonal de D sur H .

Correction 8. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.

Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera \mathcal{D} . Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Le plan \mathcal{P} admet $\vec{n}(1, -1, 1)$ comme vecteur normal. Le plan \mathcal{P}' admet $\vec{n}'(1, 2, 3)$ comme vecteur normal.

\vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires, donc \mathcal{P} et \mathcal{P}' ne sont pas parallèles. Donc leur intersection est une droite \mathcal{D} .

Pour trouver un vecteur directeur, on cherche une équation paramétrique de \mathcal{D} (sachant qu'on en a une équation cartésienne).

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On résout :

$$(M \in \mathcal{D}) \iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}z \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

On obtient donc une équation paramétrique de \mathcal{D} :
$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}\lambda \\ y - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}\lambda \\ z - 0 = \lambda \end{cases} \iff \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u},$$

en posant $A\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et $\vec{u}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$.

Donc

$$\mathcal{D} \text{ passe par le point } A\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) \text{ et est dirigée par le vecteur } \vec{u}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right).$$

Exercice 9. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.

Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera \mathcal{D} . Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Correction 9. A venir

Exercice 10. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 2)$. Montrer que ces trois points déterminent un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Correction 10. A venir

Exercice 11. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(5, 2, 1)$, $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Donner une équation du plan passant par A et de vecteurs directeurs les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
2. Donner une équation du plan normal à \vec{u} et passant par A .

Correction 11. A venir

Exercice 12. Déterminer un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Correction 12. Déterminer la droite \mathcal{D} contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Rassemblons les informations que l'on a :

• \mathcal{D} passe par le point $A = (2, 1, 3)$; il ne manque qu'un vecteur directeur de \mathcal{D} pour avoir déterminé cette droite. Appelons $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de \mathcal{D} ($\vec{u} \neq \vec{0}$; on va le déterminer à un facteur près).

On aura pour équation paramétrique de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 1 + b\lambda \\ z = 3 + c\lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

• \mathcal{D} est parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$; donc le vecteur $\vec{n}(1, 1, 1)$, qui est normal à ce plan, sera normal à \mathcal{D} .

Donc $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Donc $a + b + c = 0$, donc

$$\boxed{a = -b - c}$$

. D'où l'équation paramétrique de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = 2 + (-b - c)\lambda \\ y = 1 + b\lambda \\ z = 3 + c\lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

• \mathcal{D} rencontre la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Donc le système suivant, d'inconnue λ , admet au moins une solution.

$$(S) : \begin{cases} 2 + (-b - c)\lambda = 1 \\ 1 + b\lambda = 3 + c\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} (b + c)\lambda = 1 \\ (b - c)\lambda = 2 \end{cases}$$

On doit donc avoir

$$\boxed{b + c \neq 0}$$

(sinon la première équation n'a pas de solution), et on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ \frac{b-c}{b+c} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ b - c = 2b + 2c \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ b = -3c \end{cases}$$

Rassemblons les informations sur les coordonnées du vecteur $u(a, b, c)$:

$$\begin{cases} a = -b - c \\ b + c \neq 0 \\ b = -3c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \\ c \neq 0 \end{cases}$$

On a un paramètre libre : c'est normal, une infinité de vecteurs conviennent ; on peut par exemple poser $c = 1$, et l'on obtient $a = 2$ et $b = -3$.

Donc

$$\boxed{\vec{u}(2, -3, 1)}$$

.

\mathcal{D} est la droite passant par $A = (2, 1, 3)$ et dirigée par $\vec{u}(2, -3, 1)$

. Elle a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Produit scalaire

Exercice 13. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

- Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

Correction 13. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

1. **Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.**

On calcule :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Comme $\|\vec{u} + \vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on résout :

$$\begin{aligned} (\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|) &\iff (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \iff (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 0) \iff (4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0) \\ &\iff (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0) \iff (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|}$$

2. **Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.**

Faites un dessin pour voir de quoi vous parlez !

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On résout :

$$\begin{aligned} (ABCD \text{ est un rectangle}) &\iff (\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont orthogonaux}) \iff (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|) \\ &\iff (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\|) \iff (\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{DB}\|) \iff (AC = DB) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle, si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.}}$$

Exercice 14. Soit ABC un triangle non plat du plan.

- Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .
Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A .

Correction 14. Soit ABC un triangle non plat du plan.

- Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.**
Soit M un point du plan. On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BB}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .**

Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A .

Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .

- H appartient à la hauteur issue de B donc les droites (HB) et (CA) sont perpendiculaires, donc :

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

- H appartient à la hauteur issue de C donc les droites (HC) et (AB) sont perpendiculaires, donc :

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

On en déduit, en appliquant **1** : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 + 0 = 0$, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc les droites (HA) et (BC) sont perpendiculaires, donc H appartient à la hauteur issue de A .

Exercice 15. Formule d'Al Kachi.

On considère un triangle ABC . On note \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les mesures respectives des angles non orientés \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

- Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$?
- Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .
- Si $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b .

Correction 15. Formule d'Al Kachi.

On considère un triangle ABC . On note \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les mesures respectives des angles non orientés \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

- Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$?

On calcule :

$$a^2 = BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA} + \vec{AC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} = c^2 + b^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

De même : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\hat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$.

Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, donc si le triangle ABC est rectangle en A , on obtient $\cos(\hat{A}) = 0$, donc :

$a^2 = b^2 + c^2$: c'est le théorème de Pythagore.

- Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .

$$\cos(\hat{A}) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \text{ et } \hat{A} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{A} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 104,48^\circ.$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{11}{16}, \text{ et } \hat{B} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{B} = \arccos\left(\frac{11}{16}\right) \approx 46,57^\circ.$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab} = \frac{21}{24}, \text{ et } \hat{C} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{C} = \arccos\left(\frac{21}{24}\right) \approx 28,96^\circ.$$

Remarque : on peut vérifier que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \approx 180^\circ$ (à $0,01^\circ$ près).

- Si $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b .

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\hat{A}), \text{ donc } b^2 - 2bc \cos(\hat{A}) + c^2 - a^2 = 0, \text{ donc } b^2 - 2\sqrt{3}b - 5 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 32 = (4\sqrt{2})^2$, donc :

$$b = \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \text{ ou } b = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$$

Or $b \geq 0$ (c'est une longueur), donc

$$b = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

Géométrie et nombres complexes

Exercice 16. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

- $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$
- $(|z - i| - 1)(|z + 1| - 2) = 0$
- $\frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}_+^*$

Correction 16. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

1. $|\mathbf{z} - \mathbf{1} - \mathbf{i}| = |\mathbf{z} + \mathbf{1} + \mathbf{i}| :$

Soit A, B et M les points d'affixes $1 + i, -1 - i$ et z . On a :

$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i| \Leftrightarrow AM = BM,$$

donc l'ensemble des points cherchés est

la médiatrice du segment $[AB]$.

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned} |z - 1 - i| = |z + 1 + i| &\Leftrightarrow |x + iy - 1 - i| = |x + iy + 1 + i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 && \text{car les termes sont positifs} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow y = -x \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est

la droite d'équation $y = -x$

2. $(|\mathbf{z} - \mathbf{i}| - 1)(|\mathbf{z} + \mathbf{1}| - 2) = 0 :$

Soit A, B et M les points d'affixes $i, -1$ et z . On a :

$$\begin{aligned} (|z - i| - 1)(|z + 1| - 2) = 0 &\Leftrightarrow |z - i| - 1 = 0 \text{ ou } |z + 1| - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow AM = 1 \text{ ou } BM = 2 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points cherchés est

la réunion des cercles $\mathcal{C}(A, 1)$ et $\mathcal{C}(B, 2)$.

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned} |z - i| - 1 = 0 \text{ ou } |z + 1| - 2 = 0 &\Leftrightarrow |x + iy - i| = 1 \text{ ou } |x + iy + 1| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 \text{ ou } \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ ou } (x+1)^2 + y^2 = 4 && \text{car les termes sont positifs} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux cercles trouvés précédemment.

3. $\frac{\mathbf{z} - \mathbf{1}}{\mathbf{z} - \mathbf{i}} \in \mathbb{R}_+^* :$ Soit A, B et M les points d'affixes $i, 1$ et z . On a :

$$\begin{aligned} \frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{z - 1}{z - i} = \lambda \\ \frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{z - 1}{z - i} = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, z - 1 = \lambda(z - i) , \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points cherchés est l'ensemble des points de la droite (AB) pour lesquels les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont colinéaires de même sens (car $\lambda > 0$). On obtient

la réunion de deux demi-droites.

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$z - 1 = \lambda(z - i) \Leftrightarrow x + iy - 1 = \lambda(x + iy - i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \lambda x \\ y = \lambda(y - 1) \end{cases}$$

par identification des parties réelles et imaginaires

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{x} & \text{car } x = 0 \text{ n'est pas solution} \\ y = \frac{x-1}{x}(y-1) \end{cases}$$

La dernière équation donne : $xy = (x-1)(y-1) \Leftrightarrow xy = xy - x - y + 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$. De plus, on a : $\lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux demi-droites trouvées précédemment.