TD - 9 : Géométrie

Entraînements

Géométrie du plan

Exercice 1. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D.

Exercice 3. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$.

Déterminer le projeté orthogonal de $B = (1, 1)$ sur D.

Exercice 4. Soit D la droite d'équation $x + y - 1 = 0$. Déterminer une équation paramétrique de D.

Donner une équation cartésienne de la droite D' parallèle à D et passant par le point de coordonnées $A = (1, 1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite orthogonale à D et passant par A

Exercice 5. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2, 4)$ et $(-1, 3)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, -2)$. Donner des équations de

- La droite (AB).
- La droite $\mathcal{D}$ qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- La droite $\mathcal{D}'$ qui passe par B et qui est orthogonale à $\vec{v}$.

Exercice 6.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
2. La partie $\mathcal{C}_2$ du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 7. Soit A et B de coordonnées : $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (2, 0)$ et de rayon 1. Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM.

Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

Géométrie de l'espace

Exercice 8.

1. Déterminer l'équation du plan P qui passe par les points A, B, C de coordonnées respectives : $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ et $C = (-1, 0, -2)$.
2. Donner deux vecteurs non colinéaires et paralléles à P
3. Soit D de coordonnées $(1, 2, 3)$. Est ce que D appartient à P ?
4. Donner H le projeté orthogonal de D sur H.

Exercice 9. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.
Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera $\mathcal{D}$. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 10. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 2)$. Montrer que ces trois points détermine un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Exercice 11. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(5, 2, 1)$, $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Donner une équation du plan passant par A et de vecteurs directeurs les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Donner une équation du plan normal à $\vec{u}$ et passant par A.

Exercice 12. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Produit scalaire

Exercice 13. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.
2. Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

Exercice 14. Soit ABC un triangle non plat du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
   Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 15. Formule d'Al Kachi.
On considère un triangle ABC. On note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les mesures respectives des angles non orientés $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$?
2. Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
3. Si $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b.

Géométrie et nombres complexes

Exercice 16. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

1. $|z-1-i| = |z+1+i|$
2. $(|z-i|-1)(|z+1|-2) = 0$
3. $\dfrac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^\star$