Table des matières

Chapitre 9 : Géométrie

I Vecteurs

I. 1 Généralités

Définition 1. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un point de $\mathbb{R}^n$

Avec cette définition, un vecteur est juste un n-uplet de réels.

Graphiquement, un vecteur $u = (u_1, ..., u_n)$ est la donnée de n'importe quelle paire de points $(A = (a_1, ..., a_n), B = (b_1, ..., b_n))$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i = b_i - a_i$$

On note alors

$$u = \vec{A}B$$

Proposition 1. Soit O un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul, alors il existe un unique point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

Proposition 2. Soit $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit

$$u + v = (u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda u_1, ..., \lambda u_n)$$

Proposition 3 (Relation de Chasles)**.** Soient A, B, C trois points du plan ou de l'espace, on a alors :

$$\vec{A}B + \vec{B}C = \vec{A}C$$

Proposition 4. Soient A, B deux points du pland ou de l'espace, on a alors :

$$\vec{A}B = -\vec{B}A$$

Proposition 5. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Définition 2. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe $a, b \in \mathbb{R}^2$, non tous nuls tels que

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

Définition 3. On dit que trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ non tous nul tel que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

Définition 4. Une base de $\mathbb{R}^2$ est la donnée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires. Une base de $\mathbb{R}^3$ est la donnée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non coplanaires

I. 2 Déterminant

Définition 5. Déterminant de deux vecteurs d'un plan Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Le déterminant des vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} =$$

Proposition 6. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires si et seulement si ....

Démonstration. □

I. 3 Produit scalaire dans le plan ou l'espace

Définition 6. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

où $|| \cdot ||$ désigne la norme du vecteur et θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 7. Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....
- $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} =$ ....
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} =$ ....
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} =$ ....
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq$ ....

Remarque. On peut en déduire les identités remarquables suivantes :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

Proposition 8. Expression grâce aux coordonnées

- Soit $\vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v}(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ....
- Soit $\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v}(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ....

Remarque. On peut en déduire l'expression de la norme d'un vecteur grâce à ses coordonnées :

- Soit $\vec{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $||\vec{u}|| =$ ....

- Soit $\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : $||\vec{u}|| =$ ....

Proposition 9. Caractérisation à l'aide du produit scalaire
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....

Remarque. Soient A, B et C trois points. On a alors $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2$. On retrouve : ....

Définition 7. Vecteur normal

- Soit $\mathcal{D}$ une droite. On appelle vecteur normal de $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire tout vecteur $\vec{v}$ tel que pour tous points A et B de $\mathcal{D}$, on ait ....
- Soit $\mathcal{P}$ un plan. On appelle vecteur normal de $\mathcal{P}$ tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire tout vecteur $\vec{v}$ tel que pour tous points A et B de $\mathcal{P}$, on ait ....

Remarque. Soients A, B et C trois points. On a alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}||$, où H est le projeté de C sur la droite AB.

II Droites et cercles dans le plan

II. 1 Équation d'une droite du plan

Proposition 10. Equation cartésienne d'une droite du plan

- Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet une équation cartésienne de la forme .... avec $(a,b) \neq (0,0)$.
- Un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est alors ....
- Le vecteur directeur est alors ....
- Si $b \neq 0$, le coefficient directeur est alors ....

Proposition 11. Positions relatives de deux droites du plan
Soient deux droites $\mathcal{D}: \; ax+by+c=0$ et $\mathcal{D}': \; a'x+b'y+c'=0$.

- Elles sont confondues si ....
  c'est-à-dire si ....
- Elles sont parallèles si ....
  c'est-à-dire si ....
- Elles se coupent en un unique point si ....

Méthodes si on connaît un point $A(a,b)$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}(u_1,u_2)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}\\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x=\\ y=\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Équation cartésienne :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\iff \begin{vmatrix} x-a & u_1\\ y-b & u_2\end{vmatrix}=0\\ &\iff \end{aligned}$$

Méthode si on connaît un point $A(a,b)$ et un vecteur normal $\vec{n}(n_1,n_2)$:

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux}\\ &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ &\iff \end{aligned}$$

Exercice 1. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Les points distincts A et B ont pour coordonnées respectives $(2,4)$ et $(-1,3)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(2,-1)$ et $(3,-2)$. Donner des équations des droites (AB), $\mathcal{D}$ droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{D}'$ droite qui passe par B et qui est orthogonale à $\vec{v}$.

Exercice 2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient les points $A(1,-2)$, $B(2,-1)$ et $C(6,-2)$.

1. Donner les équations des droites (AB), (BC) et (CA).
2. Donner une représentation paramétrique de la médiane de ABC passant par B.
3. Trouver les coordonnées de H orthocentre de ABC.
4. Quelle est l'aire de ABC ?

II. 2 Équation d'un cercle du plan

Proposition 12. Equation cartésienne d'un cercle du plan
Le cercle de centre (x_0,y_0) et de rayon R admet pour équation :

Exercice 3. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient les points $A(2,3)$ et $B(1,-1)$. Quelle est l'équation du cercle de centre B passant par A ? Quelle est l'équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$?

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre Ω de coordonnées $(5,0)$ et de rayon 2.

1. Quelles sont les équations de ces cercles ?
2. Soit $M_0\in\mathcal{C}$ le point de coordonnées (x_0,y_0) et soit $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y_0x-x_0y-m=0$. Montrer que $\mathcal{D}_m$ est perpendiculaire à la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$.

III Droites et plans dans l'espace

III. 1 Équation d'un plan de l'espace

Proposition 13. Equation cartésienne d'un plan de l'espace

- Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet une équation cartésienne de la forme .... avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
- Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est alors ....

Proposition 14. Positions relatives de deux plans de l'espace
Soient deux plans $\mathcal{P}: \; ax+by+cz+d=0$ et $\mathcal{P}': \; a'x+b'y+c'z+d'=0$.

- Ils sont confondus si ....
- Ils sont parallèles si ....
- Leur intersection est une droite de l'espace sinon.

Exercice 5. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}_m$ le plan d'équation $x - my + mz = 1$ avec m paramètre réel. Soient $A(0,1,-1)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que les trois points A, B et C déterminent un plan de l'espace, noté $\mathcal{R}$ et en donner une équation.
2. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.
3. Est-il possible que $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{R}$ soient parallèles ? Orthogonaux ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
4. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{v}(0,1,1)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_m$.

Méthodes si on connaît un point $A(a,b,c)$ et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ s'écrit comme combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \\ &\iff \exists(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} \\ &\iff \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

- Équation cartésienne : on résout le système d'inconnues (λ, μ). L'équation de compatibilité que l'on obtient donne l'équation cartésienne du plan.

Méthode si on connaît un point $A(a,b,c)$ et un vecteur normal $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$:

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff \end{aligned}$$

Exercice 6. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$. Montrer que ces trois points détermine un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Exercice 7. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(5,2,1)$, $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Donner une équation du plan passant par A et de vecteurs directeurs les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Donner une équation du plan normal à $\vec{u}$ et passant par A.

III. 2 Équation d'une droite dans l'espace

Proposition 15. Equation cartésienne d'une droite de l'espace Toute droite de l'espace $\mathcal{D}$ est l'intersection de deux plans non parallèles

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

avec (a,b,c) et (a',b',c') non proportionnels.

Méthodes si on connaît un point $A(a,b,c)$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} \\ &\iff \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

- Équation cartésienne : On résout le système d'inconnue λ. Les deux équations de compatibilité que l'on obtient donnent les équations cartésiennes de la droite.

Exercice 8. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ et $D(1,2,3)$.

1. Montrer que les trois points A, B et C déterminent un plan noté $\mathcal{P}$. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par D et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
3. Donner les coordonnées de D_0 symétrique de D par rapport à $\mathcal{P}$.

IV Projection Orthogonale

Définition 8. Projection orthogonale.

- Soit M un point, et $\mathcal{D}$ une droite. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point H de $\mathcal{D}$ tel que les droites $\mathcal{D}$ et MH soient perpendiculaires.
- Soit M un point, et $\mathcal{P}$ un plan. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H de $\mathcal{P}$ tel que la droite MH soit orthogonale à $\mathcal{P}$.