Programme de colle : Semaine 10
Lundi 2 Décembre

1 Cours

1. Equations différentielles à coefficients constants
   — Résolution des équations de la forme $y'(x) + ay(x) = b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   — Forme des solutions des équations de la forme $y'(x) + ay(x) = b(x)$ où $a \in \mathbb{R}^2$ et b est une fonction dérivable. On donnera la forme d'une solution particulière.
   — Résolution d'un probleme de Cauchy associé.
2. Vocabulaire des applications :
   — Image directe d'un ensemble par une fonction.
   — Applications injectives, surjectives, bijectives
   — TVI et théorème de la bijection
3. Systèmes linéaires :
   — Méthode du Pivot de Gauss
   — Notion de rang d'un système.
   — Systèmes à paramètres.
   — Vocabulaire : systèmes homogènes, échelonnés, de Cramer, compatibles.
4. Python :
   — Instruction conditionnelle (if/else)
   — Fonction
   — Boucle `for`, `while`
   — Liste

2 Exercices Types

1. Résoudre $y'(x) + 2y(x) = 3$ avec la condition initiale $y(1) = 2$
2. Résoudre $y'(x) + 2y(x) = 3x + 1$ avec la condition initiale $y(1) = 2$. On cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont des réels à déterminer.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, +\infty[)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.
   (a) L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
   (b) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est une bijection.
5. Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

6. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & \lambda x \\ x & - & y & = & \lambda y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} & - & y & = & \lambda x \\ x & + & 2y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

7. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une des suites définies précédemment.
8. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^7$