Programme de colle : Semaine 14
Lundi 13 Janvier

1 Cours

1. Matrices
   - Définition et exemples de matrices.
   - Opérations sur les matrices :
     - Addition et multiplication par un scalaire.
     - Produit matriciel.
   - Matrices particulières :
     - Matrices carrées, diagonales, triangulaires, symétriques.
     - Matrice identité et matrice nulle.
   - Transposée d'une matrice.
   - Déterminant d'une matrice carrée de taille 2
   - Rang d'une matrice : Définition (rang du système linéaire associé) et calcul.
   - Inversibilité d'une matrice :
     - Conditions pour qu'une matrice soit inversible.
     - Calcul de l'inverse (matrice augmentée) Formule dans le cas des matrices de taille 2, Déterminant d'une matrice carrée de taille 2
2. Dénombrement
   - Ensembles finis, cardinal d'une union disjointe, cardinal d'une union quelconque pour 2 ensembles, cardinal d'un complémentaire
   - Cardinal d'un produit cartésien
   - lien entre injection, surjection, bijection et cardinal.
   - Choix de p objet parmi n
     - Avec ordre et répétition (n^p)
     - Avec ordre et sans répétition, ($\frac{n!}{(n-p)!}$)
     - Sans ordre et sans répétition, ($\binom{n}{p}$)
     - Sans ordre et avec répétition. ($\binom{n+p-1}{p}$)
3. Python :
   - Instruction conditionnelle (if/else)
   - Fonction
   - Boucle `for`, `while`
   - Liste
   - Chaine de caractères

2 Exercices Types

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, A^2, AC, ${}^tB{}^tA$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et ${}^tBX$.

   (b) Résoudre l'équation, d'inconnue X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Calculer $P^{-1}AP$.
   (c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) La matrice A est-elle inversible ?
   (e) On considère trois suites u, v et w définies par

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

   Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.
5. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.
   (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
      i. Donner le nombre de résultats possibles.
      ii. Combien de ces résultats amènent
         A. exactement 1 jeton noir ?
         B. au moins 1 jeton noir ?
         C. au plus un jeton noir ?
         D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
   (b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
   (c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.
6. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une des suites définies précédemment.
7. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^7$