Programme de colle : Semaine 15
Lundi 20 Janvier

1 Cours

1. Continuité
   - Définitions (continuité, continuité à gauche, à droite. Prolongement par continuité)
   - Partie entière
   - Théorème utilisant la continuité (Rappels : TVI, théorème de la bijection, lien avec les suites. Nouveau : Théorème de continuité sur un segment (borné et atteint ses bornes)
2. Matrices
   - Définition et exemples de matrices.
   - Opérations sur les matrices :
     - Addition et multiplication par un scalaire.
     - Produit matriciel.
   - Matrices particulières :
     - Matrices carrées, diagonales, triangulaires, symétriques.
     - Matrice identité et matrice nulle.
   - Transposée d'une matrice.
   - Déterminant d'une matrice carrée de taille 2
   - Rang d'une matrice : Définition (rang du système linéaire associé) et calcul.
   - Inversibilité d'une matrice :
     - Conditions pour qu'une matrice soit inversible.
     - Calcul de l'inverse (matrice augmentée) Formule dans le cas des matrices de taille 2, Déterminant d'une matrice carrée de taille 2
3. Python :
   - Instruction conditionnelle (if/else)
   - Fonction
   - Boucle `for`, `while`
   - Liste
   - Chaine de caractères

2 Exercices Types

1. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

   (a) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|}$

   (d) $f(x) = x^x$

2. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \qquad (E)$$

   (a) Déterminer le domaine de définition de E.

   (b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.

   (c) Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.

   (d) Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.

(e) Résoudre (E).

3. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.
4. On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, A^2, AC, ${}^tB{}^tA$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et ${}^tBX$.
   (b) Résoudre l'équation, d'inconnue X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
7. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Calculer $P^{-1}AP$.
   (c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) La matrice A est-elle inversible ?
   (e) On considère trois suites u, v et w définies par
$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$
   Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.
8. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.
   (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
      i. Donner le nombre de résultats possibles.
      ii. Combien de ces résultats amènent
         A. exactement 1 jeton noir ?
         B. au moins 1 jeton noir ?
         C. au plus un jeton noir ?
         D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
   (b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
   (c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.
9. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une des suites définies précédemment.
10. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^7$