

Programme de colle : Semaine 16

Lundi 27 Janvier

1 Cours

1. Dérivation

- Définition du taux de variations (notation : $\tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$)
- Dérivabilité en 1 point, sur un intervalle.
- Théorème utilisant la continuité (Rolle, TAF, hypothèses à connaître)
- Dérivée d'ordre supérieur. Définition de $\mathcal{C}^n(I)$.

2. Continuité

- Définitions (continuité, continuité à gauche, à droite. Prolongement par continuité)
- Partie entière
- Théorème utilisant la continuité (Rappels : TVI, théorème de la bijection, lien avec les suites. Nouveau : Théorème de continuité sur un segment (borné et atteint ses bornes))

3. Python :

- Instruction conditionnelle (if/else)
- Fonction
- Boucle `for`, `while`
- Liste
- Chaîne de caractères

2 Exercices Types

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{1 - e^{-3x}}$.

- Donner le domaine de définition et les limites aux bornes. Étudier la continuité de f , et prolonger f par continuité lorsque c'est possible.
- Étudier la dérivabilité de la fonction prolongée. f prolongée est elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

2. Montrer que si f est dérivable n fois sur $[a, b]$ et admet $n + 1$ zéros sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

3. Montrer pour tout $x > 0$ que :

$$x < e^x - 1 < x e^x$$

4. Soit la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$

5. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \sin(u_n) + 2$$

6. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^7$