

Programme de colle : Semaine 9

Lundi 25 Novembre

1 Cours

1. Systèmes linéaires :
 - (a) Méthode du Pivot de Gauss
 - (b) Notion de rang d'un système.
 - (c) Systèmes à paramètres.
 - (d) Vocabulaire : systèmes homogènes, échelonnés, de Cramer, compatibles.
2. Suites réelles :
 - (a) Etude de suites : monotonie, limites.
 - (b) En particulier suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Python :
 - (a) Instruction conditionnelle (if/else)
 - (b) Fonction
 - (c) Boucle **for**, **while**
 - (d) Liste

2 Exercices Types

1. Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x - y = \lambda y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

3. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

4. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$
 - (b) Résoudre $\sqrt{x+2} - x \geq 0$
 - (c) En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 - (d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
 - (e) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant ϵ et retourne le premier entier n tel que $|u_n - \ell| \leq \epsilon$ où ℓ est la limite précédemment déterminée.
6. Déterminer un équivalent simple de $\frac{n^2 + n}{n^3 - n}$

7. Déterminer un équivalent simple de $\frac{ne^n + n^2}{n^2 - \ln(n)}$
8. Déterminer un équivalent simple de $\frac{ne^{-n} + n^2}{n! - n^n}$
9. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une des suites définies précédemment.
10. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^7$