

# Révisions CB

**Exercice 1.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n + 4}{3}\right).$$

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x + 4}{3}\right),$$

et l'intervalle  $I = [0, 1]$ . On rappelle que  $e \in ]2, 3[$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .
2. Montrer qu'il existe un unique réel  $a \in I$  tel que  $\varphi(a) = a$ .
3. Montrer que  $\forall x \in I, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
4. Énoncer le théorème des accroissements finis sur un intervalle  $[a, b]$  (on précisera soigneusement les hypothèses).
5. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|u_n - a|$ .
6. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

## Correction 1.

1. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .  
Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0 \in [0, 1]$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $u_n \in [0, 1]$ . Alors

$$4 \leq u_n + 4 \leq 5,$$

donc

$$\frac{4}{3} \leq \frac{u_n + 4}{3} \leq \frac{5}{3}.$$

Comme la fonction  $\ln$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) \leq u_{n+1} \leq \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Or  $\ln\left(\frac{4}{3}\right) \geq 0$  et, comme  $e > 2$ , on a

$$\frac{5}{3} < 2 < e,$$

d'où  $\ln\left(\frac{5}{3}\right) < 1$ . Ainsi  $u_{n+1} \in [0, 1]$ .

Par récurrence,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.}$$

2. Posons, pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = \varphi(x) - x.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $I$  comme somme de fonctions continues. De plus,

$$f(0) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) > 0$$

et

$$f(1) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) - 1 < 0$$

car  $\frac{5}{3} < e$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f(a) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $\varphi(a) = a$ .

Montrons l'unicité. Pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x+4} - 1 = \frac{-x-3}{x+4} < 0.$$

Ainsi  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ , donc elle s'annule au plus une fois sur  $I$ .

Il existe un unique réel  $a \in I$  tel que  $\varphi(a) = a$ .

3. Pour tout  $x \in I$ , la fonction  $\varphi$  est dérivable et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+4}.$$

Comme  $x \in [0, 1]$ , on a  $x+4 \geq 4$ , donc

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{4}.$$

Pour tout  $x \in I$ ,  $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

4. Théorème des accroissements finis : soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha < \beta$ . Si une fonction  $f$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$  et dérivable sur  $] \alpha, \beta [$ , alors il existe  $c \in ] \alpha, \beta [$  tel que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha).$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après les questions précédentes,  $u_n \in I$  et  $a \in I$ . La fonction  $\varphi$  est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités  $u_n$  et  $a$ , et dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant.

D'après le théorème des accroissements finis, si  $u_n \neq a$ , il existe un réel  $c$  strictement compris entre  $u_n$  et  $a$  tel que

$$\varphi(u_n) - \varphi(a) = \varphi'(c)(u_n - a).$$

Comme  $u_n, a \in I$  et  $I$  est un intervalle, on a  $c \in I$ . Ainsi

$$|u_{n+1} - a| = |\varphi(u_n) - \varphi(a)| = |\varphi'(c)| |u_n - a| \leq \frac{1}{4} |u_n - a|.$$

Si  $u_n = a$ , l'inégalité est immédiate.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |u_n - a|$ .

6. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - a|.$$

Pour  $n = 0$ , l'inégalité est une égalité.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - a|.$$

Alors, d'après la question précédente,

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|u_n - a| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - a| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - a|.$$

La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - a|.$$

Or

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement,

$$|u_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

La suite  $(u_n)$  converge vers l'unique solution  $a \in I$  de  $\ln\left(\frac{a+4}{3}\right) = a$ .

**Exercice 2** (D'après Agro 2016). Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $u \cdot v$  leur produit scalaire, et  $u^2 = u \cdot u = \|u\|^2$ .

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . On définit

$$E^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in E, x \cdot y = 0\}.$$

Le sous-espace  $E^\perp$  est appelé orthogonal de  $E$ .

1. Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $E^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs

$$u = (1, 2, 3) \quad \text{et} \quad v = (-3, 1, 5).$$

Soit  $E = \text{Vect}(u, v)$ .

2. Déterminer la dimension de  $E$ .

3. Déterminer le réel  $\lambda$  tel que le vecteur

$$v' = u + \lambda v$$

soit orthogonal à  $u$ .

4. Pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}^3$ , on définit le vecteur

$$w' = w - \frac{w \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{w \cdot v'}{\|v'\|^2} v'.$$

(a) Montrer que, pour tout  $w \in \mathbb{R}^3$ , on a  $w' \in E^\perp$ .

Dans la suite, on suppose que

$$w = (-2, 3, 2).$$

(b) Montrer que  $w \notin E$  et  $w \notin E^\perp$ .

(c) Déterminer le vecteur  $w'$  associé à  $w$ .

(d) Montrer que la famille  $(u, v', w')$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Correction 2.

1. Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

Montrons que  $E^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

D'abord, pour tout  $y \in E$ , on a  $0_{\mathbb{R}^n} \cdot y = 0$ , donc

$$0_{\mathbb{R}^n} \in E^\perp.$$

Soient  $x_1, x_2 \in E^\perp$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $y \in E$ ,

$$(x_1 + \alpha x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + \alpha(x_2 \cdot y) = 0 + \alpha 0 = 0.$$

Ainsi  $x_1 + \alpha x_2 \in E^\perp$ .

$$\boxed{E^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n.}$$

2. On considère

$$u = (1, 2, 3) \quad \text{et} \quad v = (-3, 1, 5).$$

Les vecteurs  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires. En effet, si  $v = \alpha u$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors la première coordonnée donne  $\alpha = -3$ , tandis que la deuxième donne  $\alpha = \frac{1}{2}$ , ce qui est impossible.

Ainsi la famille  $(u, v)$  est libre. Comme  $E = \text{Vect}(u, v)$ , on obtient

$$\boxed{\dim(E) = 2.}$$

3. On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$v' = u + \lambda v$$

soit orthogonal à  $u$ . Cela équivaut à

$$(u + \lambda v) \cdot u = 0.$$

Or

$$u \cdot u = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

et

$$v \cdot u = (-3) \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 3 = 14.$$

Donc

$$(u + \lambda v) \cdot u = 14 + 14\lambda.$$

Ainsi

$$14 + 14\lambda = 0$$

donc

$$\boxed{\lambda = -1.}$$

On a donc

$$v' = u - v = (4, 1, -2).$$

4. (a) Soit  $w \in \mathbb{R}^3$ . On pose

$$w' = w - \frac{w \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{w \cdot v'}{\|v'\|^2} v'.$$

Comme  $u \cdot v' = 0$ , calculons  $w' \cdot u$  :

$$\begin{aligned}w' \cdot u &= w \cdot u - \frac{w \cdot u}{\|u\|^2} u \cdot u - \frac{w \cdot v'}{\|v'\|^2} v' \cdot u \\&= w \cdot u - \frac{w \cdot u}{\|u\|^2} \|u\|^2 - 0 \quad u \cdot v' = 0 \\&= 0.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}w' \cdot v' &= w \cdot v' - \frac{w \cdot u}{\|u\|^2} u \cdot v' - \frac{w \cdot v'}{\|v'\|^2} v' \cdot v' \\&= w \cdot v' - 0 - \frac{w \cdot v'}{\|v'\|^2} \|v'\|^2 \quad u \cdot v' = 0 \\&= 0.\end{aligned}$$

Ainsi  $w'$  est orthogonal à  $u$  et à  $v'$ . Or

$$v' = u - v,$$

donc  $v = u - v'$ . Par conséquent,

$$E = \text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, v').$$

Ainsi, pour tout  $y \in E$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$y = \alpha u + \beta v'.$$

Alors

$$w' \cdot y = \alpha w' \cdot u + \beta w' \cdot v' = 0.$$

Donc  $w' \in E^\perp$ .

Pour tout  $w \in \mathbb{R}^3$ , on a  $w' \in E^\perp$ .

(b) On suppose maintenant que

$$w = (-2, 3, 2).$$

Montrons d'abord que  $w \notin E$ . Si  $w \in E$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$w = \alpha u + \beta v.$$

Cela donne le système

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = -2, \\ 2\alpha + \beta = 3, \\ 3\alpha + 5\beta = 2. \end{cases}$$

Des deux premières équations, on obtient

$$\alpha = \frac{7}{7} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 1.$$

Mais alors

$$3\alpha + 5\beta = 8 \neq 2.$$

Le système est donc incompatible, et ainsi  $w \notin E$ .

Montrons ensuite que  $w \notin E^\perp$ . On calcule

$$w \cdot u = (-2) \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 = 10 \neq 0.$$

Donc  $w$  n'est pas orthogonal à tout vecteur de  $E$ , puisque  $u \in E$ .

$$\boxed{w \notin E \text{ et } w \notin E^\perp.}$$

(c) On a

$$u = (1, 2, 3), \quad v' = (4, 1, -2), \quad w = (-2, 3, 2).$$

De plus,

$$\|u\|^2 = 14, \quad \|v'\|^2 = 4^2 + 1^2 + (-2)^2 = 21.$$

On calcule

$$w \cdot u = 10$$

et

$$w \cdot v' = (-2) \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times (-2) = -9.$$

Donc

$$w' = w - \frac{10}{14}u - \frac{-9}{21}v' = w - \frac{5}{7}u + \frac{3}{7}v'.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} w' &= (-2, 3, 2) - \frac{5}{7}(1, 2, 3) + \frac{3}{7}(4, 1, -2) \\ &= \left(-2 - \frac{5}{7} + \frac{12}{7}, 3 - \frac{10}{7} + \frac{3}{7}, 2 - \frac{15}{7} - \frac{6}{7}\right) \\ &= (-1, 2, -1). \end{aligned}$$

$$\boxed{w' = (-1, 2, -1).}$$

(d) Montrons que la famille  $(u, v', w')$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On sait que

$$u \cdot v' = 0.$$

D'après la question 4(a), on a  $w' \in E^\perp$ , donc  $w'$  est orthogonal à  $u$  et à  $v'$ . De plus,

$$w' = (-1, 2, -1) \neq 0,$$

et les vecteurs  $u$  et  $v'$  sont non nuls.

La famille  $(u, v', w')$  est donc une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Elle est donc libre.

Comme elle est formée de trois vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ , elle est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\boxed{\text{La famille } (u, v', w') \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

**Exercice 3.** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère

$$F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1)),$$

et

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On considère la famille

$$\mathcal{B} = ((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

1. Montrer que  $G$  est non vide et stable par combinaison linéaire. Qu'en déduire ?
2. Déterminer une base de  $G$ , puis donner  $\dim(F)$  et  $\dim(G)$ .
3. Déterminer  $F \cap G$ .
4. Calculer le rang de la famille  $\mathcal{B}$  et montrer que  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

5. Montrer que  $\forall u \in \mathbb{R}^4$ , il existe un unique couple  $(g, h) \in F \times G$  tel que  $u = g + h$ .

**Correction 3.**

1. On a

$$(0, 0, 0, 0) \in G$$

car

$$0 + 0 = 0 \quad \text{et} \quad 0 + 0 = 0.$$

Ainsi  $G$  est non vide.

Soient  $u = (x, y, z, t) \in G$ ,  $v = (x', y', z', t') \in G$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$x + z = 0, \quad y + x = z,$$

et

$$x' + z' = 0, \quad y' + x' = z'.$$

Posons

$$u + \lambda v = (X, Y, Z, T).$$

Alors

$$X = x + \lambda x', \quad Y = y + \lambda y', \quad Z = z + \lambda z'.$$

On obtient

$$\begin{aligned} X + Z &= (x + \lambda x') + (z + \lambda z') \\ &= (x + z) + \lambda(x' + z') \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y + X &= (y + \lambda y') + (x + \lambda x') \\ &= (y + x) + \lambda(y' + x') \\ &= z + \lambda z' \\ &= Z. \end{aligned}$$

Donc  $u + \lambda v \in G$ .

$G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

2. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . On a

$$(x, y, z, t) \in G \iff \begin{cases} x + z = 0, \\ y + x = z. \end{cases}$$

Ainsi

$$z = -x$$

et

$$y + x = -x,$$

donc

$$y = -2x.$$

Par conséquent, pour tout  $(x, y, z, t) \in G$ ,

$$(x, y, z, t) = (x, -2x, -x, t) = x(1, -2, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

Donc

$$G = \text{Vect}((1, -2, -1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Les deux vecteurs  $(1, -2, -1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$  ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de  $G$ .

De plus,

$$F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1)),$$

et les deux vecteurs qui engendrent  $F$  ne sont pas colinéaires. Donc

$$\dim(F) = 2.$$

Enfin, la base trouvée de  $G$  contient deux vecteurs, donc

$$\dim(G) = 2.$$

$$\boxed{\dim(F) = 2 \text{ et } \dim(G) = 2.}$$

3. Soit  $u \in F \cap G$ . Comme  $u \in F$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$u = \alpha(0, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, 2, 1).$$

Ainsi

$$u = (-\beta, \alpha, 2\beta, \beta).$$

Comme  $u \in G$ , on doit avoir

$$x + z = 0.$$

Donc

$$-\beta + 2\beta = 0,$$

d'où

$$\beta = 0.$$

La deuxième équation définissant  $G$  donne alors

$$y + x = z,$$

c'est-à-dire

$$\alpha + 0 = 0.$$

Donc

$$\alpha = 0.$$

Ainsi  $u = 0$ .

$$\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

4. La famille  $\mathcal{B}$  est

$$\mathcal{B} = ((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Les deux premiers vecteurs forment une base de  $F$ , et les deux derniers forment une base de  $G$  puisque

$$(-1, 2, 1, 0) = -(1, -2, -1, 0).$$

Or

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Ainsi la famille obtenue en réunissant une base de  $F$  et une base de  $G$  est libre.

Donc  $\mathcal{B}$  est libre et contient 4 vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$ . Par conséquent,

$$\text{rg}(\mathcal{B}) = 4.$$

Comme  $\mathbb{R}^4$  est de dimension 4, une famille libre de 4 vecteurs est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

$\mathcal{B}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

5. D'après la question précédente, la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Donc

$$\mathbb{R}^4 = F + G.$$

D'après la question 3,

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Ainsi

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G.$$

Par définition de la somme directe, pour tout  $u \in \mathbb{R}^4$ , il existe un unique couple  $(g, h) \in F \times G$  tel que

$$u = g + h.$$

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^4$ , il existe un unique couple  $(g, h) \in F \times G$  tel que  $u = g + h$ .

**Exercice 4.** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est fixé.

Pour tout  $P \in E$ , on définit

$$T(P) = XP'(X).$$

On considère également les ensembles

$$F = \{P \in E \mid T(P) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{T(P) \mid P \in E\}.$$

Le but de ce problème est d'étudier ces ensembles.

**Cas particulier :**  $n = 2$  On se place dans  $E = \mathbb{R}_2[X]$ .

1. Donner une base de  $E$  et sa dimension.
2. Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $T(P)$ .
3. Déterminer une base de l'espace vectoriel  $F$ , en donner sa dimension
4. Déterminer une base de l'espace vectoriel  $G$ , en donner sa dimension
5. Montrer que tout polynôme  $P \in E$  peut s'écrire sous la forme

$$P = U + V \quad \text{avec} \quad U \in F \quad \text{et} \quad V \in G.$$

6. Montrer que cette écriture est unique.

**Cas général**

7. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
8. Déterminer une base de  $F$  et en donner sa dimension.
9. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On considère  $P_k(X) = X^k$ .
  - (a) Calculer  $T(P_k)$ .
  - (b) En déduire une expression de  $T(P)$  pour tout  $P \in E$  écrit dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .
10. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
11. Montrer que
$$G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}.$$
12. En déduire une base et la dimension de  $G$ .

**Correction 4.**

**Cas particulier :  $n = 2$**

1. Une base usuelle de  $E = \mathbb{R}_2[X]$  est

$$(1, X, X^2).$$

Ainsi,

$$\boxed{\dim(E) = 3.}$$

2. Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$P'(X) = 2aX + b,$$

donc

$$T(P) = XP'(X) = X(2aX + b) = 2aX^2 + bX.$$

$$\boxed{T(P) = 2aX^2 + bX.}$$

3. On a

$$F = \{P \in E \mid T(P) = 0\}.$$

Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c \in E$ . D'après la question précédente,

$$T(P) = 0 \iff 2aX^2 + bX = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0.$$

Ainsi les éléments de  $F$  sont exactement les polynômes constants :

$$F = \{c \mid c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1).$$

$$\boxed{(1) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = 1.}$$

4. D'après la question 2, lorsque  $P$  parcourt  $E$ , le polynôme  $T(P)$  est de la forme

$$2aX^2 + bX,$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi

$$G = \text{Vect}(X, X^2).$$

La famille  $(X, X^2)$  est libre, donc c'est une base de  $G$ .

$$\boxed{(X, X^2) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 2.}$$

5. Soit  $P \in E$ . Il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

On pose

$$U(X) = c \quad \text{et} \quad V(X) = aX^2 + bX.$$

Alors  $U \in F$ , car  $U$  est constant, et  $V \in G$ , car  $V \in \text{Vect}(X, X^2)$ . De plus,

$$P = U + V.$$

$$\boxed{\text{Tout polynôme } P \in E \text{ s'écrit sous la forme } P = U + V \text{ avec } U \in F \text{ et } V \in G.}$$

6. Montrons que cette écriture est unique.

Soit  $P \in E$ . Supposons qu'il existe  $U_1, U_2 \in F$  et  $V_1, V_2 \in G$  tels que

$$P = U_1 + V_1 = U_2 + V_2.$$

Alors

$$U_1 - U_2 = V_2 - V_1.$$

Or  $U_1 - U_2 \in F$  et  $V_2 - V_1 \in G$ . Donc

$$U_1 - U_2 \in F \cap G.$$

Comme  $F = \text{Vect}(1)$  et  $G = \text{Vect}(X, X^2)$ , on a

$$F \cap G = \{0\}.$$

Ainsi

$$U_1 - U_2 = 0,$$

donc  $U_1 = U_2$ , puis  $V_1 = V_2$ .

L'écriture est unique.

7. Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On a

$$T(0) = X \cdot 0' = 0,$$

donc  $0 \in F$ .

Soient  $P, Q \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$T(P) = 0 \quad \text{et} \quad T(Q) = 0.$$

Par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned} T(P + \lambda Q) &= X(P + \lambda Q)' \\ &= X(P' + \lambda Q') \\ &= XP' + \lambda XQ' \\ &= T(P) + \lambda T(Q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $P + \lambda Q \in F$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

8. Soit  $P \in E$ . Il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Alors

$$T(P) = XP'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^k.$$

Donc

$$T(P) = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, k a_k = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k = 0.$$

Ainsi  $P \in F$  si et seulement si  $P$  est constant. Donc

$$F = \text{Vect}(1).$$

(1) est une base de  $F$  et  $\dim(F) = 1$ .

9.

(a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour  $P_k(X) = X^k$ , on a

$$P'_k(X) = kX^{k-1},$$

avec la convention que, pour  $k = 0$ ,  $P'_0 = 0$ . Ainsi

$$T(P_k) = XP'_k(X) = kX^k.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T(P_k) = kX^k$ .

(b) Soit  $P \in E$ . Il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Par linéarité de  $T$ ,

$$\begin{aligned} T(P) &= T\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k T(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^n k a_k X^k \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k X^k. \end{aligned}$$

$$T(P) = \sum_{k=1}^n k a_k X^k.$$

10. Montrons que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Comme  $G = \{T(P) \mid P \in E\}$ , on a  $G = \text{Im}(T)$ . Or  $T$  est linéaire d'après les calculs précédents. En effet, pour tous  $P, Q \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$T(P + \lambda Q) = T(P) + \lambda T(Q).$$

L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.

$G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

11. Montrons que

$$G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}.$$

Soit  $Q \in G$ . Il existe  $P \in E$  tel que

$$Q = T(P).$$

Alors

$$Q(X) = XP'(X),$$

donc

$$Q(0) = 0.$$

Ainsi

$$G \subset \{P \in E \mid P(0) = 0\}.$$

Réciproquement, soit  $Q \in E$  tel que  $Q(0) = 0$ . Il existe  $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k.$$

Comme  $Q(0) = 0$ , on a  $b_0 = 0$ , donc

$$Q(X) = \sum_{k=1}^n b_k X^k.$$

Posons

$$P(X) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} X^k.$$

Alors  $P \in E$  et

$$T(P) = \sum_{k=1}^n k \frac{b_k}{k} X^k = \sum_{k=1}^n b_k X^k = Q.$$

Donc  $Q \in G$ .

$$\boxed{G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}}.$$

12. D'après la question précédente,

$$G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}.$$

Ainsi les éléments de  $G$  sont exactement les polynômes de  $E$  dont le terme constant est nul :

$$G = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n).$$

Si  $n \geq 1$ , la famille  $(X, X^2, \dots, X^n)$  est libre, donc c'est une base de  $G$ .

$$\boxed{\text{Si } n \geq 1, (X, X^2, \dots, X^n) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = n.}$$

Si  $n = 0$ , alors  $E = \mathbb{R}_0[X]$  et

$$G = \{0\}.$$

Dans ce cas,  $G$  admet pour base la famille vide et

$$\dim(G) = 0.$$

**Exercice 5.** Une abeille se rend chaque jour sur l'une des deux fleurs  $A$  ou  $B$ . Au jour 0, elle est sur la fleur  $A$ . À chaque jour :

- si elle est sur  $A$ , elle y reste avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , sinon elle va sur  $B$ ;
- si elle est sur  $B$ , elle va sur  $A$  avec probabilité  $\frac{3}{4}$ , sinon elle reste sur  $B$ .

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  la variable aléatoire valant 1 si l'abeille est sur  $A$  au jour  $n$ , et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de  $X_0$  et  $X_1$ .
2. Déterminer  $(a, b) \in [0, 1]^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = a \mathbb{P}(X_n = 0) + b \mathbb{P}(X_n = 1).$$

3. Établir une relation analogue pour  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ .
4. On pose

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$U_{n+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} U_n.$$

On note  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

5. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix} \quad \text{où } q = -\frac{1}{4}.$$

6. En déduire la loi de  $X_n$ .

### Correction 5.

1. Au jour 0, l'abeille est sur la fleur  $A$ . Donc

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0.$$

Ainsi  $X_0$  suit la loi certaine égale à 1.

Au jour 1, comme l'abeille part de  $A$ , elle reste sur  $A$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et va sur  $B$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ . Donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

$X_0$  est certaine égale à 1, et  $X_1$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements

$$(X_n = 0), \quad (X_n = 1),$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1). \end{aligned}$$

Donc

$$a = \frac{3}{4} \text{ et } b = \frac{1}{2}.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1). \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1). \end{cases}$$

Cela s'écrit matriciellement

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} U_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} U_n.$$

$$U_{n+1} = AU_n, \text{ où } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Posons

$$q = -\frac{1}{4}.$$

Montrons par récurrence que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 1$ , on a

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q & 2 - 2q \\ 3 - 3q & 3 + 2q \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{4} & 2 + \frac{1}{2} \\ 3 + \frac{3}{4} & 3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

La propriété est donc vraie au rang 1.

Soit  $n \geq 1$ . Supposons que

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^{n+1} = AA^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 - 3q^n & 8 + 2q^n \\ 12 + 3q^n & 12 - 2q^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, comme  $q = -\frac{1}{4}$ , on a

$$-\frac{1}{4}q^n = q^{n+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 - 3q^n & 8 + 2q^n \\ 12 + 3q^n & 12 - 2q^n \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{4}q^n & 2 + \frac{1}{2}q^n \\ 3 + \frac{3}{4}q^n & 3 - \frac{1}{2}q^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^{n+1} & 2 - 2q^{n+1} \\ 3 - 3q^{n+1} & 3 + 2q^{n+1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence,

$$\text{Pour tout } n \geq 1, A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix}.$$

6. On a

$$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$U_{n+1} = AU_n,$$

on obtient par récurrence

$$U_n = A^n U_0.$$

Pour  $n \geq 1$ , la question précédente donne

$$U_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 - 2q^n \\ 3 + 2q^n \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{2 - 2q^n}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3 + 2q^n}{5},$$

où

$$q = -\frac{1}{4}.$$

Pour  $n = 0$ , on a

$$\mathbb{P}(X_0 = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1.$$

$$\text{Pour } n \geq 1, X_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{3 + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{5}.$$

**Exercice 6.** On étudie un procédé de greffe de rosiers. Chaque semaine, une greffe réussit avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ , indépendamment des autres semaines. On note  $q = 1 - p$ . Si la greffe n'a pas réussi après  $N$  semaines ( $N \geq 1$ ), une dernière greffe est effectuée à la semaine  $N + 1$  et réussit avec probabilité 1.

**Partie 1.** On considère un rosier et on note  $G$  le nombre de greffes nécessaires à la réussite.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $G$  et sa loi.

2. Calculer  $\mathbb{P}(G \leq k)$  pour tout  $k$ .
3. On pose  $f(x) = \sum_{k=0}^N x^k$ .
  - (a) Calculer  $f(x)$  pour  $x \neq 1$ .
  - (b) En dérivant de deux façons, montrer que

$$\sum_{k=1}^N kx^{k-1} = \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

- (c) En déduire  $\mathbb{E}(G)$ .
- (d) Déterminer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(G)$  et interpréter.

**Partie 2.** On considère  $R \geq 1$  rosiers indépendants. On note  $G_i$  le nombre de greffes nécessaires pour le  $i$ -ème rosier.

4. On note  $X$  le nombre total de greffes nécessaires.
  - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
  - (b) Exprimer  $X$  en fonction des  $G_i$  et en déduire  $\mathbb{E}(X)$ .
5. On note  $Y = \max(G_1, \dots, G_R)$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $Y$ .
  - (b) Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(Y \leq k) = (1 - q^k)^R \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y \leq N + 1) = 1.$$

- (c) En déduire la loi de  $Y$ .

**Correction 6. Partie 1.**

1. La variable aléatoire  $G$  désigne le nombre de greffes nécessaires jusqu'à la première réussite. On a donc

$$G(\Omega) = \llbracket 1, N + 1 \rrbracket.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , l'événement  $(G = k)$  signifie que les  $k - 1$  premières greffes ont échoué, puis que la  $k$ -ième a réussi. Par indépendance,

$$\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1}p.$$

Enfin, l'événement  $(G = N + 1)$  signifie que les  $N$  premières greffes ont échoué, puis que la dernière greffe est effectuée avec succès certain. Donc

$$\mathbb{P}(G = N + 1) = q^N.$$

La loi de  $G$  est donnée par  $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1}p$  pour  $1 \leq k \leq N$ , et  $\mathbb{P}(G = N + 1) = q^N$ .

2. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Si  $k < 1$ , alors

$$\mathbb{P}(G \leq k) = 0.$$

Si  $1 \leq k \leq N$ , alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \leq k) &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(G = j) \\ &= \sum_{j=1}^k q^{j-1} p \\ &= p \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\ &= p \frac{1 - q^k}{1 - q} \quad q \neq 1 \\ &= 1 - q^k. \quad 1 - q = p\end{aligned}$$

Si  $k \geq N + 1$ , alors

$$\mathbb{P}(G \leq k) = 1.$$

$$\mathbb{P}(G \leq k) = 0 \text{ si } k < 1, \mathbb{P}(G \leq k) = 1 - q^k \text{ si } 1 \leq k \leq N, \text{ et } \mathbb{P}(G \leq k) = 1 \text{ si } k \geq N + 1.$$

3.

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \neq 1$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

$$\text{Pour } x \neq 1, f(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

(b) D'une part, en dérivant la somme, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^N kx^{k-1}.$$

D'autre part, pour  $x \neq 1$ , comme

$$f(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

on obtient

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \neq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^N kx^{k-1} = \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

(c) Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \sum_{k=1}^N k\mathbb{P}(G=k) + (N+1)\mathbb{P}(G=N+1) \\ &= \sum_{k=1}^N kq^{k-1}p + (N+1)q^N \\ &= p \sum_{k=1}^N kq^{k-1} + (N+1)q^N. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, appliquée à  $x=q$ , et comme  $1-q=p$ , on a

$$\sum_{k=1}^N kq^{k-1} = \frac{1 - (N+1)q^N + Nq^{N+1}}{p^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \frac{1 - (N+1)q^N + Nq^{N+1}}{p} + (N+1)q^N \\ &= \frac{1 - (N+1)q^N + Nq^{N+1} + (N+1)pq^N}{p} \\ &= \frac{1 - (N+1)q^N + Nq^{N+1} + (N+1)(1-q)q^N}{p} \\ &= \frac{1 - q^{N+1}}{p}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(G) = \frac{1 - q^{N+1}}{p}.$$

(d) Comme  $p \in ]0, 1[$ , on a  $q \in ]0, 1[$ , donc

$$q^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(G) = \frac{1 - q^{N+1}}{p} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}.$$

Lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , on retrouve l'espérance d'une loi géométrique de paramètre  $p$ .

## Partie 2.

4.

(a) Pour tout  $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ , on a

$$G_i(\Omega) = \llbracket 1, N+1 \rrbracket.$$

Donc

$$X = G_1 + \cdots + G_R$$

prend ses valeurs dans

$$\llbracket R, R(N+1) \rrbracket.$$

De plus, toutes ces valeurs sont effectivement possibles.

$$X(\Omega) = \llbracket R, R(N+1) \rrbracket.$$

(b) On a

$$X = \sum_{i=1}^R G_i.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^R \mathbb{E}(G_i).$$

Les variables  $G_i$  ont toutes la même loi que  $G$ , donc

$$\mathbb{E}(G_i) = \frac{1 - q^{N+1}}{p}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = R \frac{1 - q^{N+1}}{p}.$$

5.

(a) Comme, pour tout  $i \in \llbracket 1, R \rrbracket$ ,

$$G_i \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket,$$

on a

$$Y = \max(G_1, \dots, G_R) \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket.$$

Toutes ces valeurs sont possibles.

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, N+1 \rrbracket.$$

(b) Soit  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . On a

$$(Y \leq k) = \bigcap_{i=1}^R (G_i \leq k).$$

Comme les rosiers sont indépendants, les variables  $G_1, \dots, G_R$  sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq k) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^R (G_i \leq k)\right) \\ &= \prod_{i=1}^R \mathbb{P}(G_i \leq k) \\ &= (1 - q^k)^R. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $Y \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$ , on a

$$\mathbb{P}(Y \leq N+1) = 1.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(Y \leq k) = (1 - q^k)^R$ , et  $\mathbb{P}(Y \leq N + 1) = 1$ .

(c) Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k - 1).$$

Or, pour  $k = 1$ , on a  $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$ , et la formule reste valable en posant  $1 - q^0 = 0$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - q^k)^R - (1 - q^{k-1})^R.$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(Y = N + 1) = \mathbb{P}(Y \leq N + 1) - \mathbb{P}(Y \leq N) = 1 - (1 - q^N)^R.$$

La loi de  $Y$  est donnée par  $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - q^k)^R - (1 - q^{k-1})^R$  pour  $1 \leq k \leq N$ , et  $\mathbb{P}(Y = N + 1) = 1 - (1 - q^N)^R$ .

**Exercice 7** (Agro 2022). <sup>1</sup> Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant  $n$  boules indiscernables numérotées de 1 à  $n$ .

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier  $i$ , on pourra noter  $N_i$  la variable aléatoire égale au numéro de la  $i$ -ème boule tirée s'il y a eu au moins  $i$  tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de  $X_2$  puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de  $X_3$  et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre  $X_n$ .
4. Déterminer  $P(X_n = 1)$  et  $P(X_n = n)$ .
5. Justifier (succinctement) que

$$P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k - 1)$$

6. En déduire que pour tout  $k \geq 2$ , on a :

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n P(X_{i-1} = k - 1).$$

7. Montrer alors que pour tout  $k \geq 2$  :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k)$$

8. En déduire que  $E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}$ .
9. En déduire une expression de  $E(X_n)$  sous forme d'une somme.
- 10.

---

1. Les questions 5, 7, 10.b 11, 12 et 14 ont été ajoutées au sujet original afin de le rendre plus accessible au niveau sup

(a) Prouver que pour tout entier  $k \geq 2$ , on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

On note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

(b) Déterminer à l'aide des inégalités précédentes deux constantes  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  telles que

$$\ln(n+1) + A \leq H_n \leq \ln(n) + B$$

(c) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

(d) En déduire un équivalent de  $E(X_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

11. Montrer que pour tout  $n \geq 2$  :

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1}.$$

12. En déduire que

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

13. En déduire une expression de  $V(X_n)$  sous forme de somme.

14. On admet qu'il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq C$$

En déduire un équivalent de  $V(X_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction 7.

1.  $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$  et on a

$$P(X_2 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

et

$$P(X_2 = 2) = P(N_1 = 2) = \frac{1}{2}$$

Son espérance vaut

$$E(X_2) = 1 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

On calcule sa variance à l'aide de la formule de Koenig-Huygens, on a

$$E(X_2^2) = 1^2 \frac{1}{2} + 2^2 \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

et donc

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

2.  $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_3 = 3) = P(N_1 = 3 \cap N_2 = 2 \cap N_3 = 1) = P(N_1 = 3)P(N_2 = 2|N_1 = 3)P(N_3 = 1|N_1 = 3 \cap N_2 = 2) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(X_3 = 2) = 1 - (P(X_3 = 1) + P(X_3 = 3)) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

De plus,

$$E(X_3) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

3.  $X_n(\Omega) = [1, n]$

4.  $P(X_n = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{n}$   $P(X_n = n) = P(N_1 = n \cap N_2 = n - 1 \cap \dots \cap N_n = n) = \frac{1}{n!}$

5. Si  $N_1 = i$ , il ne reste plus que  $i - 1$  boules à l'issue du premier tirage, on est donc ramené au problème similaire avec une urne contenant  $i - 1$  boules et un tirage en moins.

On obtient bien

$$P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k - 1)$$

6. On applique la formule des probabilités totales au SCE ( $N_1 = 2, \dots, N_1 = n$ ) on obtient

$$P(X_n = k) = \sum_{i=2}^n P(X_n = k | N_1 = i) P(N_1 = i)$$

Remarquons que  $N_1$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et donc

$$P(N_1 = i) = \frac{1}{n}$$

A l'aide de la question précédente on obtient bien

$$P(X_n = k) = \sum_{i=2}^n P(X_{i-1} = k - 1) \frac{1}{n}$$

et en utilisant la linéarité de la somme on obtient l'égalité demandée.

7. D'après l'exercice précédent :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} P(X_{i-1} = k - 1)$$

On a donc en séparant la somme :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^n P(X_{i-1} = k - 1) + \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) \\ &= \frac{1}{n+1} n P(X_n = k) + \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) \\ &= \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 E(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} kP(X_{n+1} = k) && \text{Par définition de l'espérance.} \\
 &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_{n+1} = k) && \text{En utilisant Chasles et la question 4} \\
 &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k \left( \frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \right) \\
 &&& \text{D'après la question précédent} \\
 &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) \\
 &&& \text{En utilisant la linéarité de la somme}
 \end{aligned}$$

Simplifions les deux sommes. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k-1) &= \sum_{k=1}^n (k+1)P(X_n = k) && \text{Par changement d'indice} \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X_n = k) + \sum_{k=1}^n kP(X_n = k) && \text{En utilisant la linéarité} \\
 &= 1 + E(X_n) \\
 &&& \text{Par définition de l'espérance et d'un système complet d'événements}
 \end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) &= \sum_{k=2}^n kP(X_n = k) && \text{Le dernier terme est nul} \\
 &= \sum_{k=1}^n kP(X_n = k) - P(X_n = 1) && \text{on ajoute à la somme le terme } k=1 \\
 &= E(X_n) - \frac{1}{n} && \text{Par définition de espérance et en utilisant la question 4}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 E(X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} (1 + E(X_n)) + \frac{n}{n+1} \left( E(X_n) - \frac{1}{n} \right) \\
 &= E(X_n) + \frac{1}{n+1} && \text{En simplifiant les différents termes.}
 \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\boxed{E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}}$$

9. En sommant l'égalité obtenue on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(X_{k+1}) - E(X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Et on reconnaît une somme télescopique :

$$E(X_n) - E(X_1) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

Comme  $E(X_1) = 1$  on a

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

10.

- (a) Par décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  On obtient pour tout  $k \geq 2$ , pour tout  $t \in [k, k+1]$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

D'où

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

De même sur  $[k-1, k]$

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$$

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt$$

D'où

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

- (b) En sommant entre 2 et  $n$  on a :

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

Et donc en utilisant Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt.$$

On calcule les intégrales on obtient finalement :

$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq 1 + \ln(n)}$$

$A = -\ln(2) + 1$  et  $B = 1$

- (c) On divise par  $\ln(n)$  l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{-\ln(2) + 1}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

Remarquons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$  (on peut factoriser par  $n$  au numérateur par exemple) et donc le théorème d'encadrement assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

D'où l'équivalent demandé.

(d) La question précédente et la question 9 assure que

$$E(X_n) \sim \ln(n)$$

11. On reprend les calculs menés dans la question 8 :

On a

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) && \text{D'après le théorème de transfert .} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) && \text{En utilisant Chasles et la question 4} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \left( \frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k) \\ &&& \text{En utilisant la linéarité de la somme} \end{aligned}$$

Simplifions les deux sommes. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1) &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 P(X_n = k) && \text{Par changement d'indice} \\ &= \sum_{k=1}^n P(X_n = k) + \sum_{k=1}^n 2k P(X_n = k) + \sum_{k=1}^n k^2 P(X_n = k) \\ &&& \text{En utilisant la linéarité} \\ &= 1 + 2E(X_n) + E(X_n^2) \end{aligned}$$

de l'espérance et d'un système complet d'événements et à l'aide du théorème de transfert pour la dernière somme

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k) &= \sum_{k=2}^n k^2 P(X_n = k) && \text{Le dernier terme est nul} \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X_n = k) - P(X_n = 1) && \text{on ajoute à la somme le terme } k=1 \\ &= E(X_n^2) - \frac{1}{n} && \text{En utilisant le théorème de transfert et la question 4} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^2) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} (1 + 2E(X_n) + E(X_n^2)) + \frac{n}{n+1} \left( E(X_n^2) - \frac{1}{n} \right) \\ &= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1} E(X_n) + \frac{1}{n+1} && \text{En simplifiant les différents termes.} \end{aligned}$$

On obtient bien

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1}.$$

12. On utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_{n+1}) = E(X_{n+1}^2) - E(X_{n+1})^2$$

En remplaçant le premier terme à l'aide de la question précédente et le second terme à l'aide de la question 8 on obtient

$$\begin{aligned} V(X_{n+1}) &= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1} - \left(E(X_n) + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1} - \left(E(X_n)^2 + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

De nouveau à l'aide de Koenig Huygens on conclut que

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

13. On reprend les calculs de la question 9 avec la variance

$$\sum_{k=1}^{n-1} V(X_{k+1}) - V(X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

Et on reconnaît une somme telescopique :

$$V(X_n) - V(X_1) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

Comme  $V(X_1) = 0$  on a

$$V(X_n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

14. En divisant par  $\ln(n)$  on remarque que

$$\frac{V(X_n)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$$

Or L'énoncé nous dit que  $0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq C$  donc en appliquant le théorème d'encadrement on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = 0$$

Ainsi

$$V(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$