DM 1 - Correction

À rendre le Vendredi 11 Septembre 2020.

Exercice 1 Résoudre :

1. $4x^3 - 8x^2 - 5x + 7 < 0$
2. $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$
3. $|x + 3| - |12x + 4| = -23$

Résoudre l'équation suivante de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

4. $\lfloor 2x^2 + 3x \rfloor = 2m$

Correction.

1. On note $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 5x + 7$. On remarque que -1 est racine du polynôme de P. En effet, $P(-1) = 4 \times (-1)^3 - 8 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 7 = -4 - 8 + 5 + 7 = 0$. Donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$4x^3 - 8x^2 - 5x + 7 = (x - (-1))(ax^2 + bx + c).$$

Remarquons que $(x-(-1))(ax^2+bx+c) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$
On obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} a & = 4 \\ a + b & = -8 \\ b + c & = -5 \\ c & = 7 \end{cases}$$

> Remarque sur le discriminant *réduit*.
>
> Lorsque l'on a un polynôme de degré 2, $ax^2 + bx + c$ tel que b est un entier divisible par 2, alors il est parfoit plus simple de considérer ce qu'on appelle parfois (ce n'est probablement pas un terme universel) le discrimnant *réduit*. Il est défini par
>
> $$\Delta' = (\frac{b}{2})^2 - ac = \frac{1}{4}\Delta$$
>
> On a la même trichotomie (c'est-à-dire la disjonction en 3 cas, $\Delta' > 0$, $\Delta' < 0$ et $\Delta' = 0$) avec si $\Delta' \geq 0$, les racines (possiblement identiques) valent :
>
> $$r_1 = \frac{b/2 - \sqrt{\Delta'}}{a}$$
>
> et
>
> $$r_2 = \frac{b/2 + \sqrt{\Delta'}}{a}$$
>
> Exemple :
> Le discrimant réduit du polynôme de second degré : $4x^2 - 12x + 7$ vaut,
>
> $$\Delta = 6^2 - 4 * 7 = 36 - 28 = 8.$$
>
> Ainsi, les deux racines sont $\frac{6+2\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{6-2\sqrt{2}}{4} = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$. Et le polynome se factorise en
>
> $$4x^2 - 12x + 7 = 4\left(x - \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Soit, $a = 4$, $b = -12$ et $c = 7$. Le discrimant réduit du polynôme de second degré : $4x^2 - 12x + 7$ vaut,

$$\Delta = 6^2 - 4 * 7 = 36 - 28 = 8.$$

Ainsi, les deux racines sont $\frac{6+2\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{6-2\sqrt{2}}{4} = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$. On obtient finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 4(x+1)\left(x - \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Remarquons que $-1 < \frac{3-\sqrt{2}}{2} < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - \frac{3-\sqrt{2}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{3+\sqrt{2}}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{P(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty, -1[\cup \left]\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right[}$$

2. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc,

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 \Longleftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 > 0 \quad (1).$$

Posons $X = e^x$, l'équation (1) s'écrit alors :

$$X^2 - 6X + 8 > 0 \quad (1')$$

Le discrimant réduit du polynôme du second degré $X^2 - 6X + 8$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$. Les racines sont donc égales à $3 + 1 = 4$ et $3 - 1 = 2$. On a $X^2 - 6X + 8 = (X - 4)(X - 2)$. Donc $X^2 - 6X + 8 > 0$ pour

$$X \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[.$$

On revient à la variable $x = \ln(X)$ qui est bien définie pour $X \in]0, +\infty[$. On a donc

$$\boxed{e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty, \ln(2)[\cup] \ln(4), +\infty[.}$$

3. On considère l'équation

$$|x+3| - |12x+4| = -23 \qquad \text{(VA)}$$

(a) <u>Si $x < -3$.</u> On a alors $x + 3 < 0$ et $12x + 4 < 0$. Donc, pour tout $x \in]-\infty, -3[$, l'équation (VA) est équivalente à

$$-x - 3 + 12x + 4 = -23 \qquad \text{(VA(-3))}$$

Cette équation se simplifie en $11x = -24$, soit $x = \frac{-24}{11} > -3$. (VA) n'a donc pas de solution inférieur à 3.

(b) <u>Si $-3 \le x < -\dfrac{1}{3}$.</u> On a alors $x + 3 \ge 0$ et $12x + 4 < 0$. Donc pour tout $x \in [-3, -1/3[$, l'équation (VA) est équivalente à

$$x + 3 + 12x + 4 = -23 \qquad \text{(VA(-3, -1/3))}$$

Cette équation se simplifie en $13x = -30$, soit $x = -\frac{30}{13}$. On a bien, $-3 \le -\dfrac{30}{13} < -\dfrac{1}{3}$, donc $x = -\frac{30}{13}$ est une solution.

(c) Si $x \geq -\frac{1}{3}$. On a alors $x+3 \geq 0$ et $12x+4 \geq 0$. Donc l'équation (VA) est équivalente à

$$x + 3 - 12x - 4 = -23 \tag{VA(-1/3)}$$

Cette équation se simplifie en $-11x = -22$, soit $x = \frac{22}{11} = 2 > -\frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (VA) est donc } \{-\tfrac{30}{13}, 2\}}$$

4. Notons $(E_4(m))$ l'équation

$$\lfloor 2x^2 + 3x \rfloor = 2m \tag{$E_4(m)$}$$

Tout d'abord remarquons que si $2m \notin \mathbb{Z}$, l'équation $E_4(m)$ n'a pas de solution. Si $2m \in \mathbb{Z}$, c'est-à- dire si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m = \frac{n}{2}$, x est solution de $(E_4(m))$ si et seulement si

$$n \leq 2x^2 + 3x < n+1$$

On va donc résoudre les deux inéquations $(I_1(n))$:

$$n \leq 2x^2 + 3x \tag{$I_1(n)$}$$

et $(I_2(n))$:

$$2x^2 + 3x < n+1 \tag{$I_2(n)$}$$

Inéquation $(I_1(n))$. On a $n \leq 2x^2 + 3x \iff 2x^2 + 3x - n \geq 0$ Le discrimant du polynôme du second degré $2x^2 + 3x - n$ vaut

$$\Delta_1(n) = 3^2 + 4 * 2 * n = 9 + 8n.$$

— $\Delta_1(n) < 0$, c'est-à-dire $n \leq \frac{-9}{8}$, soit encore, $n \leq -2$ car n appartient à $\mathbb{Z}$. Le polynôme $2x^2 + 3x - n$ n'admet pas de racine réelle, il est donc strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tout $x \in \mathbb{R}$ est solution.
— $\Delta_2(n) = 0$, c'est-à-dire $n = \frac{-9}{8}$. Ce n'est pas possible car n est entier.
— $\Delta_2(n) > 0$, c'est-à-dire $n \geq \frac{-9}{8}$, soit encore, $n \geq -1$ car n appartient à $\mathbb{Z}$. Le polynôme $2x^2 + 3x - n$ admet deux racines réelles distinctes : $r_{1-}(n) = \frac{-3-\sqrt{9+8n}}{4}$ et $r_{1+}(n) = \frac{-3+\sqrt{9+8n}}{4}$. Il est donc positif ou nul sur

$$x \in]-\infty, r_{1-}(n)] \cup [r_{1+}(n), +\infty[.$$

Inéquation $(I_2(n))$. On a $2x^2 + 3x < n+1 \iff 2x^2 + 3x - n - 1 < 0$ Le discrimant du polynôme du second degré $2x^2 + 3x - n - 1$ vaut

$$\Delta_1(n) = 3^2 + 4 * 2 * (n+1) = 17 + 8n.$$

— $\Delta_1(n) < 0$, c'est-à-dire $n < \frac{-17}{8}$ soit encore, $n \leq -3$ car n appartient à $\mathbb{Z}$. Le polynôme $2x^2 + 3x - n - 1$ n'admet pas de racine réelle, il est donc strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $I_2(n)$ n'admet donc pas de solution.
— $\Delta_2(n) = 0$, c'est-à-dire $n = \frac{-17}{8}$ ce qui n'est pas possible car $n \in \mathbb{Z}$.
— $\Delta_2(n) > 0$, c'est-à-dire $n \geq \frac{-17}{8}$ soit encore, $n \geq -2$ car n appartient à $\mathbb{Z}$. Le polynôme $2x^2 + 3x - n - 1$ admet deux racines réelles distinctes : $r_{2-}(n) = \frac{-3-\sqrt{17+8n}}{4}$ et $r_{2+}(n) = \frac{-3+\sqrt{17+8n}}{4}$. Il est donc strictement négatif sur

$$x \in]r_{2-}(m), r_{2+}(m)[.$$

Conclusion : On a $E_4(m) \iff I_1(n) ET I_2(n)$. Autrement dit, x est solution de $E_4(m)$ si il appartient à l'intersection des ensembles de solutions de $I_1(n)$ et $I_2(n)$.
Nous avons déjà remarqué que :

$$\boxed{\text{Pour } m \notin \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\},\ E_4(m) \text{ n'a pas de solution.}}$$

On considère désormais les seuls paramètres $2m$ dans $\mathbb{Z}$. On note $2m = n$, $n \in \mathbb{Z}$

- Pour $n \leq -3$: les solutions de $I_1(n)$ sont $S_1 = \mathbb{R}$ et les solutions de $I_2(n)$ sont $S_2 = \emptyset$.
$$\boxed{\text{Donc } E_4(n/2) \text{ n'admet pas de solution.}}$$

- Pour $n = -2$: les solutions de $I_1(n)$ sont $S_1 = \mathbb{R}$ et les solutions de $I_2(n)$ sont $S_2 =]r_{2-}(n), r_{2+}(n)[$, avec $r_{2-}(n) = \frac{-3-\sqrt{17+8(-2)}}{4} = -1$ et $r_{2+}(n) = \frac{-3+\sqrt{17+8(-2)}}{4} = -\frac{1}{2}$.
$$\boxed{\text{Les solutions de } E_4(-1) \text{ sont donc }]-1, -\tfrac{1}{2}[}$$

- Pour $n \geq -1$: les solutions de $I_1(n)$ sont $S_1 = x \in]-\infty, r_{1-}(n)] \cup [r_{1+}(n), +\infty[$, avec $r_{1-}(n) = \frac{-3-\sqrt{9+8n}}{4}$ et $r_{1+}(n) = \frac{-3+\sqrt{9+8n}}{4}$.
Les solutions de $I_2(n)$ sont $S_2 =]r_{2-}(-), r_{2+}(n)[$, avec $r_{2-}(n) = \frac{-3-\sqrt{17+8n}}{4}$ et $r_{2+}(n) = \frac{-3+\sqrt{17+8n}}{4}$.
Remarquons enfin que
$$r_{2-}(n) < r_{1-}(n) < r_{1+}(n) < r_{2+}(n).$$
$$\boxed{\text{Les solutions de } E_4(n/2) \text{ sont donc }]r_{2-}(n), r_{1-}(n)] \cup [r_{1+}(n), r_{2+}(n)[}$$
$$= \left]\frac{-3-\sqrt{17+8n}}{4}, \frac{-3-\sqrt{9+8n}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{9+8m}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17+8n}}{4}\right[$$

$\square$.

Exercice 2 Donner la borne inférieure et supérieure des ensembles suivants.

$$E_1 = \left\{\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$
$$E_2 = \{x\ln(x) \,|\, x > 0\}.$$
$$E_3 = \{x\ln(x) \,|\, x \in]0, 1]\}.$$

Dire si ce sont des maximums, minimum ?

Correction.

- **Ensemble E_1.** Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}$ définie pour tout $x \geq 0$. Cette fonction est dérivable de dérivée, $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3x+2}} + \frac{-3}{\sqrt{3x}} < 0$ Donc la f est décroissante. On a donc $\sup E_1 = f(0) = \sqrt{2}$. On a donc
$$\boxed{\sup E_1 = f(0) = \sqrt{2}. \text{ C'est un maximum, il est atteint pour } n = 0.}$$
On a aussi $\inf E_1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$.
Montrons que cette limite est nulle. On a en effet
$$\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n} = \frac{3n+2-3n}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n}} = \frac{2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n}}$$
et $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n}} = 0$. Il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n} = 0$, car on aurait $\sqrt{3n+2} = \sqrt{3n}$.
$$\boxed{\inf E_1 = 0. \text{ Cette borne inférieure n'est pas un minimum.}}$$

- **Ensemble E_2.** On étudie la fonction $g(x) = x\ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable et de dérivée :

$$g'(x) = \ln(x) + 1.$$

On a donc $g'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq e^{-1}$, soit $x \in [e^{-1}, +\infty[$. Le minimum de g est donc atteint en $x = e^{-1}$ et vaut $g(e^{-1} = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$, c'est la borne inférieur et le minimum de E_2.

$$\boxed{\inf E_2 = -e^{-1} \text{ c'est un minimum}}$$

On a $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ donc

$$\boxed{E_2 \text{ n'est pas majoré et n'admet donc pas de borne supérieure.}}$$

- **Ensemble E_3.** On a vu précédemment que E_3 etait minoré, sa borne inférieure est un minimum et vaut $-e^{-1}$ Pour $x \in]0, 1]$, $g(x)$ est majoré par $g(1) = 0$.

$$\boxed{\sup E_3 = 0 \text{ et c'est un maximum.}}$$

□

Problème : Suites arithmético-géométriques Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

Correction.

1. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $0 < u_n < v_n$ ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé $0 < a < b$.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ qui est bien défini car u_n et v_n sont positifs par hypothèse de récurrence. Cette expression assure aussi que u_{n+1} est positif.
De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} && \text{Par définition.} \\ &= \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} && \text{car } u_n \text{ et } v_n \text{ sont positifs.} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} > u_{n+1}$ La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{0 < u_n < v_n}$$

2. Montrons par récurrence la propriété définie $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie car le terme de gauche vaut $v_0 - u_0$ et le terme de droite vaut $\frac{1}{1}(v_0 - u_0)$.

Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons tout d'abord que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= u_n - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0) \end{aligned}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{v_n - u_n \leq \tfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0).}$$

$\square$