DM 2 - Correction

Exercice 1. *Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :*

$$\frac{1}{x-a} \geq x+a \qquad (I(a))$$

Correction. L'ensemble de définition est $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a pour tout $x \in D_a$:

$$\begin{aligned}
(I(a)) &\iff \frac{1}{x-a} - (x+a) \geq 0 \\
&\iff \frac{1-x^2+a^2}{x-a} \geq 0 \\
&\iff \frac{x^2-(a^2+1)}{x-a} \leq 0 \\
&\iff \frac{(x-\sqrt{(a^2+1)})(x+\sqrt{(a^2+1)})}{x-a} \leq 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}(a) =]-\infty, -\sqrt{a^2+1}] \cup]a, \sqrt{(a^2+1)}]$$

$\square$

Exercice 2. *Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :*

$$\frac{1}{x-a} \geq x \qquad (I(a))$$

Correction. L'ensemble de définition est $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a pour tout $x \in D_a$:

$$\begin{aligned}
(I(a)) &\iff \frac{1}{x-a} - x \geq 0 \\
&\iff \frac{1-x(x-a)}{x-a} \geq 0 \\
&\iff \frac{-x^2+ax+1}{x-a} \geq 0 \\
&\iff \frac{x^2-ax-1}{x-a} \leq 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de x^2-ax-1 est $\Delta(a) = a^2+4 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les racines sont

$$r_+(a) = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad r_-(a) = \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$$

On va résoudre

$$r_+(a) \geq a \tag{I_+}$$

et

$$r_-(a) \geq a \tag{I_-}$$

Résolvons (I_+)

$$r_+(a) \geq a \iff \sqrt{a^2+4} \geq a \tag{1}$$

Si $a \geq 0$, $r_+(a) \geq a \iff a^2+4 \geq a^2$ toujours vrai. Donc $a \geq 0$ solution.
Si $a \leq 0$, a est solution car $\sqrt{a^2+4} \geq 0 \geq a$ Les solutions de (I_+) sont $S_+ = \mathbb{R}$

Les solutions de (I_-) sont $S_- = \emptyset$.

Les solutions de $I(a)$ sont donc données par (tableau de signes)

$$]-\infty, r_-(a)] \cup]a, r_+(a)]$$

$\square$

Exercice 3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :*

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

Correction. On pose, $Z = \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)$, l'équation devient alors :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0.$$

On remarque que -1 est une racine du polynôme, Z^3+Z^2+Z+1, qui se factorise alors en $(Z+1)(Z^2+1)$. $Z^2+1 = (Z-i)(Z+i)$ et on a donc

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (Z+1)(Z-i)(Z+i).$$

1. Pour $Z = -1 \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = -1$, on obtient $z - 2i = -z - 2i$ soit

$$z = 0.$$

2. Pour $Z = i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = i$, on obtient $z - 2i = iz - 2$. Soit $z(1-i) = -2+2i$, donc

$$z = -2$$

3. Pour $Z = -i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = -i$, on obtient $z - 2i = -iz + 2$ soit $z(1+i) = 2+2i$ donc

$$z = 2$$

$$z = 2$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\mathcal{S} = \{-2, 0, 2\}$$

$\square$

Problème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:*

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. *Montrer par récurrence que $Z(x) = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$.*
   On suppose que $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2. *Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.*
3. *Prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.*
4. *En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.*
5. *Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.*

Correction.

1. C'est l'exercice 2 du TD 1 - Récurrence, où $q = e^{ix}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$ Or $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$. Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3. On a $Z(\frac{\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - e^{i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2n})}{2i\sin(\frac{\pi}{2n})} \\
&= \frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(Z(x)) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Im}(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx))
\end{aligned}$$

Donc $S_n = \mathfrak{Im}(Z(\frac{\pi}{n})) = \mathfrak{Im}(\frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$

4. On a d'après la question précédente $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8}} = S_4$ Donc $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{S_4}$.

Par ailleurs $S_4 = \sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
Donc

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

5. Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. On a en effet pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

En particulier $\tan'(0) = 1$ et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$, et

$$\begin{aligned}
n\tan(\frac{\pi}{2n}) &= \frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

On vient de voir que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ on a par composé de limites :

$$\lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$

$\square$