DM 3 - Autour de $\arctan$

Exercice 1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$:*

$$\cos(3x-1) = \sin(2x) \tag{1}$$

$$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(-x) = 0 \tag{2}$$

Correction.

$$\cos(3x-1) = \sin(2x)$$

Equivaut à

$$\cos(3x-1) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

Donc

$$\begin{cases} 3x-1 & \equiv \frac{\pi}{2} - 2x \quad [2\pi] \\ ou & \\ 3x-1 & \equiv -\frac{\pi}{2} + 2x \quad [2\pi] \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} 5x & \equiv \frac{\pi}{2} + 1 \quad [2\pi] \\ ou & \\ x & \equiv 1 - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \equiv \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5} \quad [\frac{2\pi}{5}] \\ ou & \\ x & \equiv 1 - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}$: les solutions sont

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{10} + \frac{1}{5} + \frac{2k\pi}{5}, 1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$$

Sur $[-\pi, \pi[$:

$$\mathcal{S} \cap [-\pi, \pi[= \{\frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}, \frac{-3\pi}{10} + \frac{1}{5}, \frac{-7\pi}{10} + \frac{1}{5}, \frac{9\pi}{10} + \frac{1}{5}, 1 - \frac{\pi}{2}\}$$

(On a $\frac{1}{5} < \frac{\pi}{10} \iff 1 < \frac{\pi}{2}$, qui est vrai, donc $\frac{9\pi}{10} + \frac{1}{5} < \pi$)

$$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(-x) = 0 \tag{(2)}$$

$\cos(3x) = \mathfrak{Re}((e^{ix})^3) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
L'équation est équivalente à

$$4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$$

Notons $X = \cos(x)$, on obtient l'équation

$$4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0.$$

Or $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 4(X + \frac{1}{2})(X - \frac{\sqrt{2}}{2})(X + \frac{\sqrt{2}}{2})$ On a donc

$$\begin{cases} \cos(x) & = \frac{-1}{2} \\ \quad ou & \\ \cos(x) & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \quad ou & \\ \cos(x) & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

et

$$\mathcal{S} \cap [-\pi, \pi[= \{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\}$$

□

Problème 1 (Autour de arctan). *1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ que vaut $\tan(\arctan(x))$?*

(b) Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

(c) Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

(d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

Correction.

(a) Par définition pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(\theta) = x$ d'inconnue x a une unique solution dans $]-\pi/2, \pi/2[$ notée $\arctan(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ admet une unique solution dans $]-\pi/2, \pi/2[$. Si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(x) = y$ alors par définition $x = \arctan(y)$. Ainsi pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = y$ implique

$$\arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x$$

(c) Ici $x \notin]-\pi/2, \pi/2[$, donc $tan(x) = y$ n'implique pas $x = \arctan(y)$!! Par contre, $x - \pi$ vérifie

i. $x - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$

ii. $tan(x - \pi) = y$

Donc $x - \pi = \arctan(y)$ et finalement

$$\forall x \in]\pi/2, 3\pi/2[, \arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x - \pi$$

(d) Soit y tel que $\tan(x) = y$ et $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

i. $x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$

ii. $tan(x - k\pi) = \tan(x) = y$

Donc $x - k\pi = \arctan(y)$ *et finalement*

$$\forall x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, \arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x - k\pi$$

□

2. *On rappelle que la dérivée d'un quotient* $\frac{f}{g}$ *vaut* $\frac{f'g - fg'}{g^2}$. *Montrer que pour tout* x *où* tan *est définie on a :*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Correction. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

□

3. *On rappelle que la dérivée d'une composée* $f \circ g$ *vaut* $g' \times f' \circ g$. *Grâce à la formule obtenue en* 1.(*a*) *montrer que la dérivée de* arctan *sur* $\mathbb{R}$ *vaut*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Correction. *D'après la formule* $1, a$, *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(\arctan(x))' = 1$$

Et par ailleurs

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x))' &= \arctan'(x) \times (1 + \tan^2(\arctan(x)) \\ &= \arctan'(x) \times (1 + x^2)\end{aligned}$$

Donc

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

□

4. *Montrer que pour tout $x > 0$ on a :*

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

Correction. *Soit $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0$ donc f est constante sur $]0, \infty[$ et $]-\infty, 0[$.*
$f(1) = \pi/2$ donc pour tout $x \in]0, \infty[$, $f(x) = \pi/2$. [1] $\square$

5. *Soit x, y deux réels positifs. Montrer que si $xy < 1$ alors*

$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$

Correction. *Soit $x \geq 0, y \geq 0$ alors $\arctan(x) \geq 0$ et $\arctan(y) \geq 0$ donc l'inégalité de gauche est triviale.*
Remarquons par ailleurs que $\arctan$ est croissante (cf 3). Ainsi, pour $xy < 1$, c'est-à-dire $y < \frac{1}{x}$ on a

$$\arctan(y) < \arctan(\frac{1}{x})$$

donc

$$\arctan(x) + \arctan(y) < \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \pi/2$$

$\square$

6. *Etant donnée $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, tel que $xy < 1$, montrer que*

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$ [2]

Correction. *On a d'après 1-a*

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y)} = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

De plus $\tan(\theta) = x$ équivaut à $\theta = \arctan(x)$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. D'aprés la question 5, $\arctan(x) + \arctan(y) \in [0, \pi/2[$ donc on a bien

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$\square$

---

1. On remarquera que $f(-1) = -\pi/2$ et pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = -\pi/2$
2. De manière plus générale, $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$, où :

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$, avec x et y positifs.
- $k = -1$ si $xy > 1$, avec x et y négatifs.

7. *Soit* $x > 0$, *comparer :* $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ *et* $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Correction. *Soit* $X = \frac{x}{x+1}$ *et* $Y = -\frac{x-1}{x}$ *avec* $x > 0$.
Pour tout $x > 0$, $XY = \frac{1-x}{1+x} < 1$, *on peut donc appliquer le résultat de la question 6. On obtient :*

$$\arctan(X) + \arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-XY}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1-x}{x}}{1 - \frac{1-x}{1+x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

□

8. *Simplifier*

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

Correction.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \arctan(\frac{n}{n+1}) - \arctan(\frac{0}{1})\\ &= \arctan(\frac{n}{n+1}).\end{aligned}$$

□

9. *En déduire* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Correction.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \arctan(\frac{n}{n+1}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

□