DM 3 - Trigonométrie

À rendre le Vendredi 2 / Lundi 5 Octobre 2020.

Exercice 1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *puis dans* $[-\pi, \pi[$ *:*

$$\cos(3x - 1) = \sin(2x) \tag{1}$$

$$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(-x) = 0 \tag{2}$$

Problème 1 (Autour de arctan)**.**

1. (a) *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *que vaut* $\tan(\arctan(x))$ *?*
   (b) *Soit* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$*, que vaut* $\arctan(\tan(x))$ *?*
   (c) *Soit* $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$*, que vaut* $\arctan(\tan(x))$ *?*
   (d) *Soit* $k \in \mathbb{Z}$*, et* $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$*, que vaut* $\arctan(\tan(x))$ *?*
2. *On rappelle que la dérivée d'un quotient* $\frac{f}{g}$ *vaut* $\frac{f'g - fg'}{g^2}$*. Montrer que pour tout* x *où* $\tan$ *est définie on a :*
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$
3. *On rappelle que la dérivée d'une composée* $f \circ g$ *vaut* $g' \times f' \circ g$*. Grâce à la formule obtenue en* 1.(a) *montrer que la dérivée de* arctan *sur* $\mathbb{R}$ *vaut*
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
4. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *on a :*
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
5. *Soit* x, y *deux réels positifs. Montrer que si* $xy < 1$ *alors*
$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$
6. *Etant donnée* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$*, tel que* $xy < 1$*, montrer que*
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right),$$ [1]
7. *Soit* $x > 0$*, comparer :* $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ *et* $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
8. *Simplifier*
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
9. *En déduire* $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

---

1. De manière plus générale, $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$, où :

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$, avec x et y positifs.
- $k = -1$ si $xy > 1$, avec x et y négatifs.