Correction DM 4 - Binôme de Newton

Proposition 1. *Soit* $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

- *Symétrie des coefficients binomiaux :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- *Triangle de Pascal :*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 1. *Faire la preuve de la proposition (pas besoin de récurrence)*

Correction.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1))!\,(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{(n-k+1)!\,k!} \qquad \text{on met au même dénominateur} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!\,k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. *Soit* $k \in [\![0,n]\!]$ *:*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En conséquence

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 2. *Soit* $(n,p,k,j) \in \mathbb{N}^4$ *avec* $k \in [\![0,n]\!]$ *et* $j \in [\![0,k]\!]$. *Montrer que* $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

Correction.
$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(k-j)!j!}$$
et
$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-j-(n-k)!(n-k)!} = \frac{n!}{j!}\frac{1}{(k-j)!(n-k)!}$$

□

I Binôme de Newton

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ (et sur votre brouillon faite $n=3$).

   Correction.

   (a) $n=0$

   On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k b^{0-k} = a^0b^0 = 1$

   (b) $n=1$

   On a $(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^kb^{1-k} = \binom{1}{0}a^0b^{1-0} + \binom{1}{1}a^1b^{1-1} = a+b$

   (c) $n=2$

   On a $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^kb^{2-k} = \binom{2}{0}a^0b^{2-0} + \binom{2}{1}a^1b^{2-1} + \binom{2}{2}a^2b^{2-2} = b^2+2ab+b^2$

   □

   On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :

2. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}.$$

   Correction.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^{n-n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

   On fait le changement devariable $k+1=j$ sur la somme. On obtient $j\in[\![1,n]\!]$, donc
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$

   Comme j est un indice muet, on peut le changer en k. On a donc la formule demandée.

   □

3. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}$$

   Correction.
$$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\end{aligned}$$

Maintenant on fait un changement de variable sur la première somme en posant $j = k+1$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1}$$

On a donc, en se rappelant que j est muet et donc remplacable par k

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On applique la relation de Chasles au dernier terme de la première somme et au premier terme de la deuxième somme. On obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

□

4. En déduire que

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Correction. On applique la relation obtenue dans la question 2 (relation de Pascal) à ce qu'on vient de trouver.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Par ailleurs,

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1}$$

et

$$b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n-0+1}$$

Ce sont donc les deux termes qui manquent à la somme de 0 à $(n+1)$. ON a ainsi

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Ce qui prouve le résultat grace à la question 5

□

5. Conclure.

Correction. On fait une récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} :' \forall a, b \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

L'initialisation a été faite à la question 3.
L'hérédité correspond à la question 6. □

Exercice 3 (Application)**.** *Soit* $n, m \in \mathbb{N}^2$

1. *Calculer* $(1+x)^n(1+x)^m$ *et* $(1+x)^{n+m}$ *à l'aide du binome de Newton.*
2. *En déduire que pour tout* $r \leq n+m$ *on a :*

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}\binom{m}{r-j} = \binom{n+m}{r}$$

Correction.vu en cours. D'après le binome :

$$(1+x)^n(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l$$

Et par ailleurs

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} x^j$$

Comme $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ on peut identifier les coefficients des deux polynomes. On obtient pour tout $r \in [\![0, n+m]\!]$

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l}$$

et

$$\sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

□