DM 4 - Binôme de Newton

À rendre le Lundi 2 novembre 2020.

Le but de se devoir est de montrer la formule suivante, appelée, formule du *binôme de Newton*(ou formule du binôme)

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

Formule à connaitre par coeur dès à présent.

Prenez ce DM comme une part du cours. Toutes les formules encadrées sont à connaitre.

I Rappels sur les coefficients binomiaux

I. 1 Rappels sur la factorielle

Définition 1. *Soit n un entier naturel.*
- *Si $n \geq 1$, on appelle factorielle n le nombre :*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

- *Par convention, on a :* $0! = 1$

Exemples.
- $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3! = 24$
- $(n+1)! = (n+1) \times (n!)$

Exercice 1. *Simplifier au maximum les nombres suivants ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$) :* $\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$ *et* $\dfrac{(n!)^2}{(n+2)!(n-1)!}$.

I. 2 Coefficients binomiaux : définition et propriétés

Définition 2. *Soit (n,p) deux entiers naturels.*
- *Si $p \in [\![0,n]\!]$, on appelle coefficient binomial, le nombre*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- *Par convention si $p \notin [\![0,n]\!]$:* $\binom{n}{p} = 0$

Exemples.
- $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n)!} = 1$, $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$, $\qquad \binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n$,

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Remarque. *Les coefficients binomiaux seront très utiles en dénombrement :* $\binom{n}{p}$ *est le nombre de tirages simultanés (sans ordre et sans répétition) de* p *boules parmi* n.

Proposition 3. *Soit* $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

- *Symétrie des coefficients binomiaux :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- *Triangle de Pascal :*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 2. *Faire la preuve de la proposition (pas besoin de récurrence)*

Proposition 4. *Soit* $k \in [\![0,n]\!]$ *:*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En conséquence

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 3. *Soit* $(n,p,k,j) \in \mathbb{N}^4$ *avec* $k \in [\![0,n]\!]$ *et* $j \in [\![0,k]\!]$. *Montrer que* $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

II Binôme de Newton

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ (et sur votre brouillon faite $n=3$). On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :
2. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.$$
3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1}$$
4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$
5. Conclure.

Exercice 4 (Application)**.** *Soit* $n, m \in \mathbb{N}^2$

1. *Calculer* $(1+x)^n(1+x)^m$ *et* $(1+x)^{n+m}$ *à l'aide du binome de Newton.*
2. *En déduire que pour tout* $r \leq n+m$ *on a :*
$$\sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}\binom{m}{r-j} = \binom{n+m}{r}$$