Correction - DM 5

Exercice 1. *Montrer que*

$$\{z \in \mathbb{C},\, |z+1| \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C},\, -2 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 0\}$$

On n'est pas obligé d'utiliser la forme algébrique...

Correction. Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ on a pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C},\, |z+1| \leq 1\}$:

$$|\mathfrak{Re}(z+1)| \leq |z+1| \leq 1$$

C'est-à-dire :

$$-1 \leq z+1 \leq 1$$

soit

$$\boxed{-2 \leq z \leq 0}$$

□

Exercice 2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(n+1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$$

Les récurrences c'est bien mais long...

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leq n!$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

□

Exercice 3. *Simplifier*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \qquad \textit{et} \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 4.

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) \times \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \times \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0$$

et

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

On reconnait deux produits téléscopiques, donc

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2-1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, *donc*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5. *Calculer*

$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \min(i,j)$$

Un peu plus long que les précédents

Correction. Solution 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}(n-i)i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{-i^2+(2n+1)i}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} -i^2 + (2n+1)\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Solution 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) &= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i=j} \min(i,j) + \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j} \min(i,j) + \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],j<i} \min(i,j)\\
&= \left(\sum_{i\in[\![1,n]\!]} i\right) + \left(2\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j} i\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(3+2(n-1))}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

□

Exercice 6. *Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.*

Il y a plus de 2000 élèves au lycée Chaptal. Montrer qu'il existe au moins 6 élèves qui ont le même jour d'anniversaire.

Correction. Supposonss que tous les tiroirs contiennent strictement moins qu'une paire de chaussettes, comme il y a n tiroirs il y a au plus n chaussettes. Par contraposée, si il y a plus de $(n+1)$ paires de chaussettes au moins un des tiroirs en contient plus d'une.

Supposons par l'absurde qu'il y ait au plus 5 élèves avec des dates d'anniversaires identiques. Il y en a au plus 5 qui sont nés le 1er janvier, au plus 5 qui sont nés le 2 janvier, au plus 5 qui sont nés le 3 janvier, ..., au plus 5 qui sont nés le 29 février,..., au plus 5 qui sont nés le 31 décembre. Ainsi il y a au plus 5*366=1830 élèves, ce qui est absurde.

Pour les fanas de formalisme. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des élèves et D l'ensemble des dates possibles. Soit $A : \mathcal{E} \to D$ l'application qui à un éléve associe sa date d'anniversaire. On note pour tout $d \in D$, $A_d := \{e \in \mathcal{E}\,,\, A(e) = d\}$ c'est-à-dire l'ensemble des élèves dont la date d'anniversaire est d. On a $\mathcal{E} = \cup_{d\in D} A_d$: chaque élève a une date d'anniversaire. De plus, pour $d \neq d'$ on a $A_d \cap A_{d'} = \emptyset$, chaque élève a une unique date d'anniversaire. Ainsi $\mathcal{E} = \cup_{d\in D} A_d$ est une partition de $\mathcal{E}$. On a donc

$$Card(\mathcal{E}) = \sum_{d\in D} Card(A_d)$$

Supposons par l'absurde que pour tout $d \in D, Card(A_d) \leq 5$ on a alors :

$$Card(\mathcal{E}) \leq \sum_{d\in D} 5 = 366 * 5 = 1830.$$

Comme $Card(\mathcal{E}) \geq 2000$, c'est absurde.

Ainsi il existe $d \in D$ tel que $Card(A_d) \geq 6$, c'est-à-dire, qu'il existe une date d pour laquelle 6 élèves ont leur anniversaire ce jour.

$\square$

Remarque : A_d est généralement noté $A^{-1}(\{d\})$.