

# DM 5

À rendre le Lundi 9 novembre 2020.

L'objectif de ce DM est la concision du raisonnement, il est à rendre sur une copie double maximum. Le plus court (tout en étant compréhensible!!) le mieux!

**Exercice 1.** Montrer que

$$\{z \in \mathbb{C}, |z + 1| \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C}, -2 \leq \Re(z) \leq 0\}$$

On n'est pas obligé d'utiliser la forme algébrique...

**Exercice 2.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n + 1)! \geq \sum_{k=0}^n k!$$

Les récurrences c'est bien mais long...

**Exercice 3.** Simplifier

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

**Exercice 4.** Calculer

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \min(i, j)$$

Un peu plus long que les précédents

**Exercice 5.** 1. Démontrer que si vous rangez  $(n + 1)$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

2. Il y a 2400 élèves au lycée Chaptal. Montrer qu'il existe au moins 6 élèves qui ont le même jour d'anniversaire.